

Sergiu Miron

REZOVAREA PROBLEMEI MILENARE
și
TRIGONOMETRIA ABSOLUTĂ

Chișinău 2021

Cuprins

Prefață	4
1. Elemente de trigonometrie. Gradul	8
2. Rezolvarea problemei milenare generată de numărul π	14
3. Definiția lungimii arcului de cerc	19
4. Definiția funcțiilor trigonometrice de variabilă reală	21
5. Cosinusul și sinusul sumei algebrice a două numere reale	26
6. Transformarea sumei algebrice în produse	29
7. Transformarea produselor în sume	31
8. Intervalele de monotonie și de convexitate ale funcțiilor sinus și cosinus	32
9. Funcțiile trigonometrice tg și ctg	38
10. Funcțiile trigonometrice inverse	43
Date din activitatea pedagogică-științifică a autorului	49
Bibliografie	52

Prefață

Cu multe mii de ani în urmă oamenii de știință a vremii au constatat, că între lungimea cercului și diametrul lui există un raport care nu depinde de lungimea diametrului. De-a lungul anilor acest raport a fost considerat a fi numărul 3. După ce Arhimede a arătat că acest raport se conține între fracțiile mixte $3\frac{10}{71}$ și $3\frac{1}{7}$, a început goana în căutarea cifrelor zecimale ale raportului menționat în ipoteza că ar putea fi o fracție zecimală finită sau periodică, ceea ce nu s-a întâmplat. Peste ani acest raport a fost botezat cu litera π din alfabetul grecesc. Problema raportului π a devenit o enigmă pentru matematicienii tuturor timpurilor. Astfel, în secolul XVI eminentul matematician al acelor vremuri Francois Viète (1540 - 1603), a construit virtual un poligon regulat înscris într-un cerc cu $3 \cdot 2^{17} = 393216$ laturi. În consecință a determinat 12 cifre zecimale ale numărului π , ceea ce a prezentat un record pentru acea vreme. Peste ani însă acest record a fost depășit, dar enigma generată de problema numărului π a rămas enigmă. Răsfoind cartea «Istoria numărului π » scrisă și publicată în 1865 de către Florica Cîmpan ne convingem că în istoria omenirii n-a existat o problemă de matematică mai veche și mai controversată ca problema numărului π . Un exemplu care constituie dramatismul acestei probleme

reprezintă cei trei ani de muncă intelectuală a matematicianului francez Lagny (1660-1734) care s-au încununat cu descoperirea a 128 de cifre zecimale ale numărului π . A fost un nou record pentru Franța după recordul depășit al lui Viète. Acest nou record n-a fost depășit în istorie deși, peste mai bine de o jumătate de secol, eminentul matematician elvețian Leonhard Euler (1707-1783) a descoperit și el 128 de cifre zecimale ale numărului π . Și atunci s-a pus problema căutării unei formule pentru definiția numărului π după modelul definiției numărului e [2]. Însă, spre deosebire de șirul de numere raționale prin care s-a definit numărul e , șirul perimetrelor poligoanelor regulate înscrise într-un cerc este un șir de numere reale și de-a lungul istoriei nu s-a reușit elaborarea unui mecanism prin care să se demonstreze că acest șir este convergent. S-au făcut multe încercări pentru elaborarea unei formule care ar reprezenta o anumită definiție a numărului π . Acest număr, de-a lungul secolelor a fost reprezentat și prin produse infinite, și prin serii numerice, dar și prin diverse formule. Însă în sutele de ani de muncă intelectuală a multor generații de matematicieni nu s-a reușit elaborarea unei definiții a numărului π , care ar fi fost utilă pentru rezolvarea unor probleme importante, legate în mod direct de acest număr. Printre aceste probleme menționăm lungimea cercului, lungimea arcului de cerc.

În introducerea dată ne-am referit doar la câteva episoade și nu la cele mai relevante din istoria dramatică a numărului π . Dar să considerăm și câteva exemple mai complicate pentru a scoate în evidență munca înaintașilor noștri și efortul lor în rezolvarea problemei generată de enigma numărului π .

Un exemplu relevant constituie reprezentarea numărului π de către matematicianul Viete printr-un produs infinit de numere iraționale:

$$\pi = 2 \times \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}} \times \dots$$

Iar în 1665 matematicianul englez John Wallis (1616 - 1703) reprezintă numărul π printr-un produs infinit de numere raționale, dar într-un mod special:

$$\frac{\pi}{2} = \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5}\right) \cdot \left(\frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7}\right) \cdot \left(\frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9}\right) \dots$$

Notă. Reprezentăm formula lui Wallis într-un mod mai comod pentru cercetare:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{36}{35} \cdot \frac{64}{63} \cdot \frac{100}{99} \cdot \frac{144}{143} \dots \frac{4n^2}{4n^2 - 1} \dots$$

Dacă în formula lui Wallis notăm prin P_n produsul primilor n factori, atunci, datorită structurii factorilor din această formulă, obținem un șir crescător de fracții ordinare supraunitare. Odată cu creșterea rangului n , șirul P_n înghite rând pe rând fiecare factor din formula lui Wallis. Pe de altă parte, șirul factorilor din formula lui Wallis este descrescător și convergent către numărul 1. Potrivit construcției, termenii șirului P_n se reprezintă prin formula:

$$P_n = \frac{a \cdot 10^n + a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \dots + a_{n-1} \cdot 10 + a_n}{b \cdot 10^n + b_1 \cdot 10^{n-1} + b_2 \cdot 10^{n-2} + \dots + b_{n-1} \cdot 10 + b_n}$$

Evident că șirul P_n este mărginit – fapt care rezultă chiar din formula lui Wallis. În caz contrar această formulă și-ar pierde valabilitatea. În această formulă coeficienții respectivi sunt cifre de la 0 la 9, iar a și b sunt cifre diferite de 0 începând cu anumită

valoare a rangului n . Astfel, șirul crescător P_n este mărginit superior și, prin urmare, există limita finită a acestui șir, care este o fracție ordinară și reprezintă produsul factorilor din formula lui Wallis și nicidecum numărul irațional $\frac{\pi}{2}$.

Cât privește formula lui Viete, cu certitudine se poate afirma că nu a existat și nu putea să existe o demonstrație a acestei formule. La fel ca și formula lui Wallis, această veche formulă a lui Viete reprezintă o aproximație a numărului π , dar a fost lansată în mod axiomatic ca o formulă exactă.

Dacă împărțim ambii membri ai formulei lui Viete la numărul 2, obținem o egalitate între un produs infinit de fracții ordinare raționale (formula lui Wallis) și un produs infinit de fracții ordinare, iraționale (generat din formula lui Viete prin împărțire la 2):

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{36}{35} \cdot \frac{64}{63} \cdots = \frac{\pi}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \times \cdots$$

Pornind de la faptul că șirul factorilor din ambele componente ale egalității obținute este descrescător și convergent către numărul 1, ajungem la concluzia că aceste două formule ale lui Wallis și Viete au generat o egalitate controversată, un paradox.

Spre deosebire de metoda definiției numărului e , formulele lui Viete și Wallis nu sunt demonstrate și nici nu puteau fi demonstrate. Aceste formule se bazează pe intuiția autorilor și nu reprezintă numărul π . Nimeni nu poate ghici un produs infinit de factori, care să reprezinte numărul irațional π . Determinarea sutelor și miilor de cifre zecimale ale numărului π nu rezolvă problema generată de către acest număr fantomă.

Toate aceste reprezentări ale numărului π , dar și multe altele incluse în lucrările de referință 3 și 7 demonstrează că înaintașii noștri, matematicieni, erau înzestrați cu o mare voință de muncă intelectuală, de cercetare. Cât privește problema numărului π matematicienii tuturor timpurilor s-au aflat mereu în căutarea

unei soluții pentru această problemă. Însă specificul ei era de așa natură încât a rămas nesoluționată până la sfârșitul secolului XX.

În această lucrare s-a rezolvat problema numărului π și astfel s-a încheiat munca multor generații de matematicieni care de-a lungul istoriei și-au sacrificat zeci de ani din viață acestei probleme. S-a reușit elaborarea unei definiții a numărului π bine încheagată din punct de vedere matematic și care corespunde naturii acestui număr venit în mulțimea numerelor reale din adâncul istoriei în rezultatul muncii cotidiene a meșterilor dogari calificați.

În septembrie 2018 la Chișinău a avut loc o conferință internațională la care am ținut un referat pe problema numărului π , referință 10. Astfel, în această lucrare s-a rezolvat cea mai veche și cea mai controversată problemă de matematică din istoria omenirii.

1. Elemente de trigonometrie. Gradul

Numim cerc trigonometric un cerc de rază $r=1$ și centrul în originea sistemului rectangular de coordonate xOy . Orice parte a cercului cuprinsă între două puncte ale lui se numește arc de cerc, iar unghiul format de către două raze ale cercului se numește unghi la centru sau unghi central.

Unghiul central are vârful în centrul O al cercului, în originea sistemul de coordonate. Un unghi central poate fi ascuțit, obtuz sau drept. Unghiul drept este format de către două raze reciproc perpendiculare în centrul O al cercului. Oricare două raze diferite generează două unghiuri centrale dintre care unul poate fi ascuțit sau unghi drept sau ambele pot fi unghiuri obtuze.

În particular două raze așezate pe același diametru formează două unghiuri congruente, care împart cercul în jumătate și se numesc unghiuri alungite sau unghiuri întinse. Fiecare unghi central se sprigină pe un arc de cerc. Pe cercul trigonometric sunt posibile două sensuri de ocolire, de mișcare pe cerc, de alunecare, de orientare. Orientarea pe cercul trigonometric se consideră în

sens pozitiv dacă alunecarea pe cercul trigonometric are loc în sensul opus rotației acelor de ceasornic, și negativă dacă această mișcare are loc în sensul rotației acelor de ceasornic.

Așa cum pentru axa numerică aveam etalonul de măsură-unitatea de măsură a diferitor segmente și intervale, la fel pentru arcele de cerc, pentru unghiurile centrale vom defini, vom constitui, o unitate de măsură care se va numi grad trigonometric sau simplu grad. Întrucât gradul urmează să fie unitatea de măsură pentru arcele de cerc, pentru unghiurile centrale este logic să punem la baza definiției gradului o anumită parte a cercului, un anumit arc de cerc, care cel puțin teoretic poate fi constituit cu ajutorul mecanismelor de care dispunem. Noi nu puteam construi a 90-a parte din unghiul drept fără implicarea cercului.

În această lucrare vom defini gradul ca un arc de cerc care reprezintă a 360-a parte din cercul trigonometric. Această definiție a gradului se reduce la construcția unui poligon regulat cu 360 de laturi înscris în cerc. O problemă care poate fi rezolvată nu numai teoretic dar și practic. În continuare vom descrie mecanismul efectuării construcției unui arc de cerc de un grad - unitatea de măsură. Astfel, gradul reprezintă un arc de cerc, un unghi central care constituie a 360-a parte din cerc.

Considerăm un pentagon regulat înscris în cerc. Apoi fiecare dintre cele cinci unghiuri centrale se împarte în trei unghiuri congruente. Ducând razele respective și unind consecutiv punctele de intersecție ale razelor cu cercul obținem un poligon regulat cu 15 laturi înscris în cerc.

Repetăm procesul împărțind fiecare dintre cele 15 unghiuri centrale în trei unghiuri congruente și ducem razele respective. Unim apoi consecutiv punctele de intersecție ale razelor cu cercul și obținem un poligon regulat cu 45 de laturi înscris în cerc.

Astfel cercul este împărțit 45 de arce congruente. În continuare efectuăm de 3 ori la rând operația de împărțire a arcelor în jumătate. În așa fel obținem un poligon regulat cu 360 de laturi înscris în cerc și fiecare latură a acestui poligon subîntinde un arc

de un grad. La rîndul său gradul conține 60 de arculețe de cerc congruente numite minute, iar fiecare minută conține 60 de arculețe de cerc congruente numite secunde. Un grad se notează cu 1° , două grade se notează cu 2° , în genericu α grade se notează cu α° sau simplu cu α grade. Unghiul întins conține 180° .

Orice unghi central conține atâtea grade, minute și secunde, câte grade, minute și secunde conține arcul pe care el se sprijină.

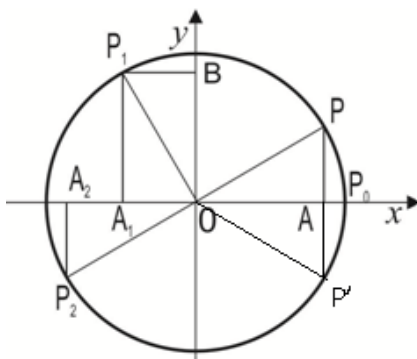


Fig.1

În fig.1 avem un cerc trigonometric și notăm prin $P_0(1;0)$ punctul de intersecție al cercului cu semiaxa pozitivă Ox . Considerăm apoi pe cercul trigonometric un punct arbitrar $P(u;v)$ situat în cadranul întâi. Abscisa $u=OA$ și ordonata $v=AP$ ale punctului $P(u;v)$ sunt catetele triunghiului dreptunghic OAP , ipotenuza căruia este $OP=1$.

Axele sistemului rectangular de coordonate, intersectându-se, formează patru unghiuri drepte astfel, încât fiecare dintre acestea se sprijină pe un arc de 90° a cercului trigonometric. Deci, unghiul drept conține 90° . Din fig.1 rezultă că $\angle APO = \angle POB$ ca unghiuri

alterne interne. În acest caz $\angle AOP + \angle APO = \angle AOP + \angle POB = 90^\circ$.

Prin urmare, suma unghiurilor alăturate ipotenuzei unui triunghi dreptunghic este egală cu 90° și deci suma unghiurilor triunghiului dreptunghic este egală cu 180° . Să ne convingem că suma unghiurilor interne ale oricărui triunghi este egală cu 180° . Într-adevăr, dintr-un anumit vârf al triunghiului ducem o perpendiculară pe latura opusă și în rezultat triunghiul dat s-a împărțit în două triunghiuri dreptunghic. Și acum observăm că suma unghiurilor interne ale triunghiului considerat este egală cu suma unghiurilor alăturate celor două ipotenuze.

Dacă unghiul central $\angle POA = \alpha^\circ$, atunci $\angle APO = 90^\circ - \alpha^\circ$.

Observăm că în triunghiul dreptunghic OAP ordonata $v=AP$ a punctului $P(u;v)$ este cateta AP opusă unghiului central care este $\alpha^\circ = \angle POA$, iar abscisa $u=OA$ este cateta alăturată unghiului

central $\alpha^\circ = \angle POA$.

Definiție. Se numește sinus trigonometric de unghiul α° și se notează prin $\sin \alpha$ raportul ordonatei AP (catetei AP) către ipotenuza $OP=1$. Astfel $\sin \alpha$ este raportul catetei opuse unghiului α° către ipotenuza triunghiului OAP și deci $\sin \alpha^\circ = v$ - ordonata punctului $P(u; v)$.

Se numește cosinus trigonometric de unghiul α° și se notează prin $\cos \alpha$ raportul catetei $OA = u$, către ipotenuza $OP = 1$. Astfel $\cos \alpha$ este raportul catetei alăturate unghiului α° către ipotenuza triunghiului OAP și deci $\cos \alpha = u$ este abscisa punctului $P(u; v)$. Prin urmare $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = v^2 + u^2 = 1$

Pe de altă parte cateta $OA = u$ este opusă unghiului ascuțit $\angle APO = 90^\circ - \alpha^\circ$ al triunghiului OPA , și atunci $\sin(90^\circ - \alpha) = OA = u = \cos \alpha$. La fel cateta $AP=v$ este alăturată unghiului $\angle APO = 90^\circ - \alpha^\circ$ și deci $\cos(90^\circ - \alpha) = AP = v = \sin \alpha$.

Așadar $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ și $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, unde α este unghiul ascuțit.

Să calculăm valorile principale ale sinusului și cosinusului pentru unghiul ascuțit .

$$1. \cos 0^\circ = u = 1; \sin 0^\circ = v = 0$$

$$2. \sin 45^\circ = \cos 45^\circ \text{ și atunci } \sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ = 2\sin^2 45^\circ = 1$$

$$\text{de unde } \sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$3. \sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \text{ iar } \cos 60^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

Pentru a arăta că $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, se consideră punctul P' pe cercul trigonometric simetric punctului P față de axa Ox , fig.1. În rezultat, obținem triunghiul echilateral POP' în care fiecare latură este 1, iar $\sin 30^\circ = AP = \frac{1}{2}$. În continuare se aplică rezultatul de mai sus și identitatea $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Pentru punctul $P(1; 0)$ avem $\cos 0^\circ = 1$, iar $\sin 0^\circ = 0$

Pentru punctul $P(0; 1)$ avem $\cos 90^\circ = u = 0$; iar $\sin 90^\circ = v = 1$

În continuare vom calcula $\sin(90^\circ + \alpha)$ și $\cos(90^\circ + \alpha)$, unde $90^\circ + \alpha^\circ$ este un unghi obtuz și din fig.1 avem

$P_1(\cos(90^\circ + \alpha); \sin(90^\circ + \alpha))$. Deci punctul $P_1(u; v)$ este situat pe cercul trigonometric în cadranul II. Astfel $\angle P_oOP = \alpha^\circ$, iar

$\angle P_oOP_1 = 90^\circ + \alpha^\circ$. Ducem P_1B perpendiculară pe axa oy și obținem triunghiul dreptunghic OBP_1 congruent cu triunghiul OAP , iar OB este ordonata punctului P_1 și obținem

$\sin(90^\circ + \alpha) = OB = OA = \cos \alpha$, iar abscisa punctului P_1 este $\cos(90^\circ + \alpha) = -A_1O = -AP = -\sin \alpha$.

În acest caz $\cos(180^\circ - \alpha) = \cos(90^\circ + (90^\circ - \alpha)) = -\sin(90^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ și $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin(90^\circ + (90^\circ - \alpha)) = \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$

Să calculăm și coordonatele punctului P_2 situat pe cercul trigonometric în cadranul III fig.1.

Deci $P_2 = P_2 (\cos(180^\circ + \alpha); \sin(180^\circ + \alpha))$. Din triunghiurile congruente P_2OA_2 și POA rezultă $\cos(180^\circ + \alpha) = -A_2O = -OA = -\cos \alpha$; și ordonata $\sin(180^\circ + \alpha) = -A_2P_2 = -\sin \alpha$

Rezultă că:

$$\cos(270^\circ - \alpha) = \cos(180^\circ + (90^\circ - \alpha)) = -\cos(90^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\sin(270^\circ - \alpha) = \sin(180^\circ + (90^\circ - \alpha)) = -\sin(90^\circ - \alpha) = -\cos \alpha.$$

Să calculăm câteva valori ale funcțiilor trigonometrice de unghi obtuz:

$$1. \sin 135^\circ = \sin(90^\circ + 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2. \cos 150^\circ = \cos(90^\circ + 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

În cursul gimnazial de matematică paralel cu unghiul central se introduce și noțiunea de unghi înscris în cerc. Un unghi, laturele căruia intersectează cercul, se numește unghi înscris în cercul dat. Există unghiuri înscrise într-un cerc, vârfurile cărora se află în interiorul cercului, pe cercul dat sau în exteriorul lui. Avem și unghiuri formate dintr-o tangentă la cerc și o coardă dusă din punctul de tangență. Aceste unghiuri de asemenea se exprimă într-un anumit mod pe arcurile pe care se sprijină. Astfel, spre deosebire de unghiul central care este egal cu arcul pe care se sprijină, unghiul înscris vârful căruia se află pe cerc, precum și unghiul format de către o tangentă și o coardă dusă din punctul de

tangență, este egal cu jumătatea arcului pe care se sprijină. Unghiul înscris vârful căruia se află în exteriorul cercului, este egal cu semidiferența arcelor formate în rezultatul intersecției laturilor unghiului cu cercul. În final, unghiul înscris vârful căruia se află în interiorul cercului, este egal cu semisuma dintre arc, pe care acest unghi se sprijină și arc, pe care se sprijină unghiul format prin prelungirea laturilor unghiului dat.

2. Rezolvarea problemei milenare generată de numărul π

În anii '70 ai secolului XX am reușit să elaborez un mecanism prin care s-a rezolvat problema milenară generată de enigma numărului π , iar ulterior am construit o trigonometrie nouă definită pe mulțimea numerelor reale și bine încheagată din punct de vedere matematic. Pentru rezolvarea problemei milenare am folosit noțiunea elementară de convexitate (concavitate) a funcției.

Funcția f definită pe o mulțime de numere reale D se numește convexă (concavă), dacă pentru oricare două valori diferite x_1 și x_2

din D are loc inegalitatea $f(x_1) + f(x_2) > 2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$ și respectiv.

$$\left(f(x_1) + f(x_2) < 2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \right).$$

Este demonstrat și un criteriu de convexitate (concavitate) a funcției.

Ca funcția $f : D \rightarrow R$ să fie convexă (concavă) pe mulțimea D este necesar și suficient, ca pentru orice punct $x_0 \in D$, funcția

$$g : D \setminus x_0 \rightarrow R, \quad g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad \text{să fie strict crescătoare}$$

(descrescătoare) pe mulțimea perforată $D \setminus x_0$.

Considerăm funcția $f : 0 \leq r \leq \frac{1}{2} \rightarrow R$, $r \in Q$, și $f(r) = \sin(r180^\circ)$.

Considerăm apoi un cerc trigonometric, fig. 2 și notăm cu $P_0(1;0)$ punctul de intersecție al cercului cu semiaxa pozitivă Ox . Numerelor raționale arbitrare r_1 și r_2 , $0 \leq r_1 < r_2 \leq \frac{1}{2}$, le asociem pe cercul

trigonometric punctele P_1 și P_2 , astfel încât arcele $P_0P_1 = r_1180^\circ$ și $P_0P_2 = r_2180^\circ$ sunt orientate în sens opus rotației acelor de ceasornic.

Ducem coarda P_1P_2 și segmentele $A_2P_1 = \sin(r_1180^\circ)$, iar $A_1P_2 = \sin(r_2180^\circ)$. În rezultat obținem trapezul $A_1A_2P_1P_2$, în care AC este linia medie. Semidreapta OC trece

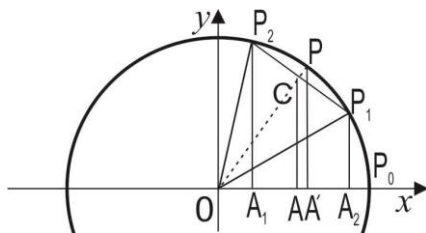


Fig. 2

prin mijlocul coardei P_1P_2 și deci este bisectoarea unghiului P_1OP_2 și trece prin mijlocul P al arcului P_1P_2 . Ușor ne convingem, că arcul P_0P

conține $\frac{r_1+r_2}{2} 180^\circ$. Într-adevăr din fig.2 deducem următoarele:

$\angle P_0 O P = \angle P_0 O P_1 + \angle P_1 O P$. și $\angle P_0 O P = \angle P_0 O P_2 - \angle P O P_2$. Adunăm parte cu parte aceste egalități și luând in considerare că $\angle P_1 O P = \angle P O P_2$, obținem

$$2\angle P_0 O P = \angle P_0 O P_1 + \angle P_0 O P_2 = (r_1 + r_2) \cdot 180^\circ \text{ și deci}$$

$$\angle P_0 O P = \frac{r_1 + r_2}{2} \cdot 180^\circ$$

Întrucât $OC < OP$ rezultă că segmentul $AC < A'P = \sin(\frac{r_1+r_2}{2} 180^\circ)$

$$\text{și deci } \frac{\sin(r_1 \cdot 180^\circ) + \sin(r_2 \cdot 180^\circ)}{2} = \frac{A_2 P_1 + A_1 P_2}{2} = AC < A'P =$$

$$= \sin(\frac{r_1 + r_2}{2} 180^\circ). \text{ Astfel, pentru } 0 \leq r_1 < r_2 \leq \frac{1}{2} \text{ obținem}$$

$$\sin(r_1 180^\circ) + \sin(r_2 180^\circ) < 2\sin(\frac{r_1 + r_2}{2} 180^\circ) \quad (1)$$

Din inegalitatea (1) deducem, că funcția $f(r) = \sin(r 180^\circ)$ este concavă. Potrivit criteriului de concavitate, funcția

$$f_1(r) = \frac{\sin(r \cdot 180^\circ) - \sin 0}{r - 0} = \frac{1}{r} \sin(r 180^\circ) \text{ pe mulțimea } 0 < r \leq \frac{1}{2}$$

este descrescătoare. Pentru $r = \frac{1}{p}$, $p \in \mathbb{Q}$, $p \geq 2$, obținem funcția

$f_2(p) = p \sin \frac{180^\circ}{p}$ crescătoare pe mulțimea $p \geq 2, p \in \mathbb{Q}$.

Considerăm $p = n, n \in \mathbb{N}^*$, și obținem șirul strict crescător $\left(n \cdot \sin \frac{180^\circ}{n} \right)$. Perimetrul unui poligon regulat cu n laturi înscris într-un cerc este $2Rn \sin \frac{180^\circ}{n}$, iar perimetrul unui pătrat circumscris cercului este $8R$. Astfel avem inegalitatea $2Rn \sin \frac{180^\circ}{n} < 8R$, de unde rezultă că $n \sin \frac{180^\circ}{n} < 4$. Așadar șirul $\left(n \sin \frac{180^\circ}{n} \right)$ este strict crescător și mărginit superior și deci este convergent. Notăm limita acestui șir cu litera π și în așa fel s-a încheiat problema numărului π durată a căreia constituie mii de ani.

$$\text{Astfel, prin definiție } \pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \sin \frac{180^\circ}{n} \right).$$

Odată cu definiția formulată s-a pus capăt enigmei generată de problema numărului π și astfel s-a rezolvat cea mai veche și controversată problemă de matematică din istoria omenirii.

Consecință. Perimetrul unui poligon regulat cu n laturi, înscris într-un cerc de raza R , se reprezintă prin formula

$C_n = 2Rn \sin \frac{180^\circ}{n}$. Potrivit definiției numărului π , șirul perimetrelor poligoanelor regulate, înscrise în cercul de rază R , este convergent și limita C a acestui șir se calculează astfel:

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} (2Rn \sin \frac{180^\circ}{n}) = 2\pi R$$

Prin definiție numărul $C=2\pi R$ reprezintă lungimea cercului de rază R .

Remarcă. Mecanismul elaborat în această lucrare pentru definiția numărului π poate fi aplicat și pentru definiția numărului e .

Într-adevăr funcția logaritmică în baza 10 este concavă și crescătoare pe tot domeniul ei de definiție. Considerăm valorile arbitrare $x_1 > -1$ și $x_2 > -1$ și obținem

$$\lg(1+x_1) + \lg(1+x_2) = 2 \lg \sqrt{(1+x_1)(1+x_2)} < 2 \lg \frac{(1+x_1)(1+x_2)}{2}.$$

Astfel, funcția dată pe intervalul $(-1, \infty)$ este concavă.

Potrivit criteriului de concavitate funcția

$$f(x) = \frac{\lg(1+x) - \lg 1}{(1+x) - 1} = \lg(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

este descrescătoare pe intervalul perforat $(-1, \infty)$, $x \neq 0$. Rezultă că funcția $f_1(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ este și ea descrescătoare pe acest interval perforat, iar pe intervalul $(0, +\infty)$ este mărginită superior

de către valoarea $f_1\left(-\frac{1}{2}\right) = 4$. Prin urmare în punctul $x = 0$ există limita laterală de dreapta a funcției $f_1(x)$ care se notează cu litera

e. Astfel prin definiție $e = \lim_{x \rightarrow 0+} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ sau pentru $x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$,

$$\text{avem } e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Așadar aceste două numere reale π și e descoperite în diferite milenii din istoria omenirii, au pătruns în mulțimea numerelor reale prin același mecanism, și ambele au fost puse în slujba științei-unul la baza funcțiilor trigonometrice, iar altul la baza funcțiilor hiperbolice, precum și la baza sistemului natural de logaritmi.

3. Definiția lungimii arcului de cerc

Considerăm un cerc de raza R și un arc al acestui cerc de α° , fig.3.

Apoi înscriem în acest arc de cerc o linie poligonală regulată cu n

laturi. Perimetrul l_n al acestei linii poligonale este $l_n = 2Rn \sin \frac{\alpha^\circ}{2n}$.

În formula obținută facem substituția:

$$\frac{\alpha^\circ}{2n} = \frac{180^\circ}{p}, \text{ de unde obținem}$$

$$2n = \frac{\alpha}{180} \cdot p, \text{ iar perimetrul } l_n \text{ capătă}$$

forma:

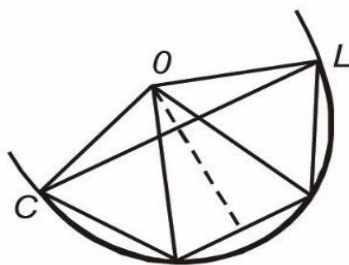


Fig. 3

$$l_n = l_p = \frac{\alpha}{180} R p \sin \frac{180^\circ}{p} = \frac{\alpha R}{180} \left(p \sin \frac{180^\circ}{p} \right) \text{ unde funcția}$$

$$p \sin \frac{180^\circ}{p} \text{ este crescătoare și conține șirul } \left(n \sin \frac{180^\circ}{n} \right)$$

convergent către numărul π .

Deci există limita finită l a perimetrului liniei poligonale l_n și

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} l_n = \lim_{p \rightarrow \infty} l_p = \frac{\alpha R}{180} \lim_{p \rightarrow \infty} \left(p \sin \frac{180^\circ}{p} \right) = \frac{\alpha R}{180} \cdot \pi = \pi R \frac{\alpha}{180}.$$

Așadar, prin definiție, lungimea unui arc de cerc de raza R și α° se calculează din formula

$$l = \pi R \frac{\alpha}{180} \quad (2)$$

$$\text{Din (2) rezultă: } \alpha^\circ = \frac{l}{\pi R} \cdot 180^\circ \text{ și } \frac{l}{2\pi R} = \frac{\alpha}{360}$$

Din ultima egalitate, adoptată prin consens în manualele școlare, rezultă formula (2).

În mod similar, se definește sectorul de cerc.

4. Definiția funcțiilor trigonometrice de variabilă reală

În continuare vom elabora altă construcție a trigonometriei. Mai întâi vom exprima orice număr real prin numărul π . Considerăm numărul x și notăm prin $n, n \in \mathbb{Z}$, partea întreagă a fracției $\frac{x}{2\pi}$,

iar partea fracționară a numărului $\frac{x}{2\pi}$ se notează prin $\theta, 0 \leq \theta < 1$.

Astfel $\frac{x}{2\pi} - n = \theta$, de unde rezultă egalitatea $x = 2n\pi + 2\theta\pi$. În

această reprezentare a numărului x , atât numărul întreg n , cât și fracția subunitară θ sunt funcții de x . După ce s-a realizat reprezentarea numărului x prin formula $x = 2n\pi + 2\theta\pi$ considerăm un cerc trigonometric și notăm cu $P_0(1;0)$ punctul de intersecție al cercului cu semiaxa pozitivă Ox , fig.4.

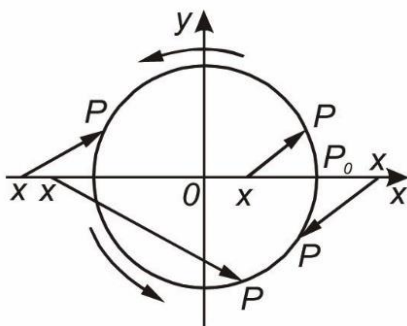


Fig. 4

Definim apoi o aplicație a mulțimii numerelor reale în mulțimea punctelor cercului trigonometric conform următoareii reguli: Numărului arbitrar $x \in \mathbb{R}$ îi punem în corespondență, îi asociem, un punct $P(u;v)$ pe cercul trigonometric astfel încât arcul P_0P este orientat în sens opus rotației acelor de ceasornic și lungimea acestui arc este egală cu $2\theta\pi$; $|\vec{P_0P}| = 2\theta\pi$.

Potrivit acestei reguli fiecărui număr real x i se pune în corespondență o valoare bine determinată a abscisei u și o valoare bine determinată a ordonatei v a punctului $P(u;v)$. Prin urmare atât abscisa u cât și ordonata v a punctului $P(u;v)$ sunt funcții de variabilă reală x .

Funcția $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $u = \cos x$, se numește cosinus trigonometric. Funcția $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $v = \sin x$, se numește sinus trigonometric, $x \in \mathbb{R}$. Din definiția funcțiilor sinus și cosinus rezultă $|\sin x| \leq 1$; $|\cos x| \leq 1$ și identitatea $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Rezultă de asemenea și proprietatea de periodicitate – funcțiile $\sin x$ și $\cos x$ sunt periodice și perioada lor generală este $2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, iar perioada minimă este 2π – lungimea cercului trigonometric. Într-adevăr, potrivit definiției funcțiilor sinus și cosinus, numerelor $x = 2n\pi + 2\theta\pi$ și $t = 2\theta\pi$ le corespunde pe cercul trigonometric același punct $P(u;v)$ și prin urmare abscisa $u = \cos x = \cos(2n\pi + 2\theta\pi) = \cos t = \cos 2\theta\pi$, iar ordonata punctului $P(u;v)$ este $v = \sin x = \sin(2n\pi + 2\theta\pi) = \sin t = \sin 2\theta\pi$, $0 \leq \theta < 1$.

Din formula $\alpha^{\circ} = \frac{l}{\pi R} \cdot 180^{\circ}$ pentru $R=1$ și $l=2\theta\pi$ rezultă că

$\alpha^{\circ}=2\theta 180^{\circ}$. Așa dar, arcul de *lungime* $|\widetilde{P_0P}| = 2\theta\pi$ conține $2\theta 180^{\circ}$.

Următoarele valori: $\sin 0 = 0$, $\sin \pi = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ și $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$,

$\cos 0 = 1$; $\cos \pi = -1$; $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ și $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$, sunt coordonatele punctelor de intersecție ale cercului trigonometric cu axele de coordonate.

Ușor se demonstrează că funcția $\cos x$ este pară, iar funcția $\sin x$ este impară.

Pentru aceasta considerăm un cerc trigonometric, fig.5.

Punctul de intersecție al cercului cu semiaxa pozitivă Ox de asemenea se notează cu $P_0(1;0)$. Numărului $x=2n\pi + 2\theta\pi$ îi corespunde pe cercul trigonometric punctul $P_1(\cos x; \sin x)$, iar numărului $-x=-2n\pi - 2\theta\pi = -2(n+1)\pi + 2(1-\theta)\pi$ îi corespunde pe cercul dat punctul $P_2(\cos(-x); \sin(-x))$. Deoarece

$|\widetilde{P_0P_1}| = 2\theta\pi$, iar $|\widetilde{P_0P_2}| = 2(1-\theta)\pi = 2\pi - 2\theta\pi$, rezultă că

$|\widetilde{P_0P_1}| + |\widetilde{P_0P_2}| = 2\pi$ și $|\widetilde{P_2P_0}| + |\widetilde{P_0P_2}| = 2\pi$.

Prin urmare $|\widetilde{P_0P_1}| = |\widetilde{P_2P_0}|$ și deci punctele P_1 și P_2 sunt simetrice față de axa Ox , de unde rezultă că $\cos(-x) = \cos x$, iar $\sin(-x) = -\sin x$.

Să calculăm cele câteva valori esențiale ale funcțiilor sinus și cosinus pornind de la definiția adoptată în această lucrare. Pentru

$\theta = \frac{1}{12}$; $\frac{1}{8}$ și $\frac{1}{6}$ obținem pe cercul trigonometric punctele

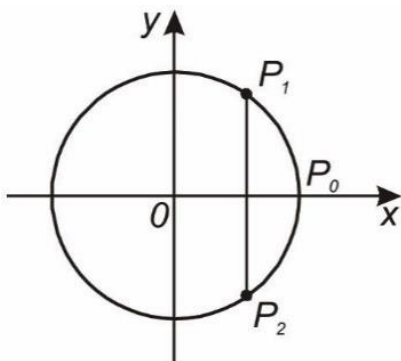


Fig. 5

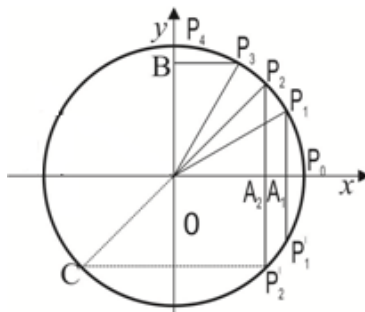


Fig. 6

$P_1\left(\cos\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{6}\right); \quad P_2\left(\cos\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4}\right); \quad P_3\left(\cos\frac{\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{3}\right);$
 $P_4\left(\cos\frac{\pi}{2}, \sin\frac{\pi}{2}\right);$ precum și punctele $P_1'\left(\cos\frac{\pi}{6}, -\sin\frac{\pi}{6}\right)$ și
 $P_2'\left(\cos\frac{\pi}{4}, -\sin\frac{\pi}{4}\right)$ simetrice respectiv cu punctele P_1 și P_2 față

de axa Ox , fig.6. Coardele $P_1'P_1$ și $P_2'P_2$ intersectează axa Ox
 respectiv în punctele A_1 și A_2 . Arcul $P_1'P_0P_1$ are lungimea $\frac{\pi}{3}$ și
 astfel reprezintă o șesime din lungimea cercului trigonometric. În
 acest caz coarda $P_1'A_1P_1$ reprezintă latura unui exagon regulat
 înscris în cercul trigonometric și deci, este egală cu raza cercului 1.
 Rezultă că, ordonata $v = \sin\frac{\pi}{6}$ a punctului P_1 se calculează din

formula: $v = \sin\frac{\pi}{6} = A_1P_1 = \frac{1}{2}P_1'P_1 = \frac{1}{2}.$

La fel arcul $P_2'P_0P_2$ are lungimea $\frac{\pi}{2}$ și reprezintă o pătrime din lungimea cercului. Prin urmare, coarda $P_2'A_2P_2$ reprezintă latura unui pătrat înscris în cercul de raza 1. Întrucât diagonala unui pătrat înscris într-un cerc este egală cu diametrul cercului, în cazul dat este 2. Avem $P_2'P_2 = \sqrt{2}$. Prin urmare, ordonata $v = \sin \frac{\pi}{4}$ a punctului P_2 se determină din formula:

$$v = \sin \frac{\pi}{4} = A_2P_2 = \frac{1}{2} P_2'P_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

În continuare observăm că, arcul P_3P_4 are lungimea $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$, egală cu lungimea arcului P_0P_1 . Din punctul P_3 ducem perpendiculară pe axa Oy și obținem în intersecție punctul B , dar și triunghiul dreptunghic BOP_3 congruent cu triunghiul A_1P_1O , de unde deducem că $BP_3 = A_1P_1$. Prin urmare abscisa $u = \cos \frac{\pi}{3}$ a punctului P_3 se determină din formula:

$$u = \cos \frac{\pi}{3} = BP_3 = A_1P_1 = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

În continuare se aplică identitatea $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

5. Cosinusul și sinusul sumei algebrice a două numere reale

Cea mai rațională cale pentru stabilirea relațiilor între funcțiile trigonometrice sinus și cosinus începe cu formula cosinusului sumei a două numere reale.

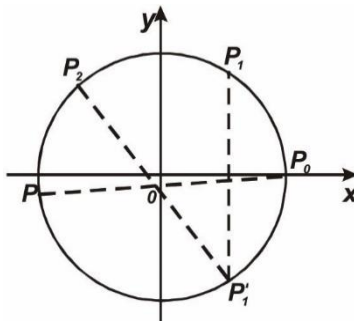


Fig.7

Considerăm un cerc trigonometric, fig.7, în care $P_0(1.0)$ este punctul de intersecție al cercului cu semiaxa pozitivă Ox .

Considerăm apoi numerele reale arbitrare x, t și suma lor $x+t$.

Reprezentăm aceste numere prin numărul π astfel:

$$x = 2n\pi + 2\theta_1\pi; \quad t = 2k\pi + 2\theta_2\pi \text{ și } x + t = 2m\pi + 2(\theta_1 + \theta_2)\pi,$$

$0 \leq \theta_1 < 1, 0 \leq \theta_2 < 1$, iar $m, n, k \in \mathbb{Z}$. Potrivit definiției

funcțiilor sinus și cosinus numerelor reale x și t le sunt asociate pe

cercul trigonometric respectiv punctele: $P_1(\cos x, \sin x) =$

$$= P_1(\cos 2\theta_1\pi, \sin 2\theta_1\pi) \text{ și } P_2(\cos t, \sin t) =$$

$= P_2(\cos 2\theta_2\pi, \sin 2\theta_2\pi)$, iar sumei $x + t$ îi corespunde punctul $P(\cos(x + t), \sin(x + t)) = P(\cos 2(\theta_1 + \theta_2)\pi, \sin 2(\theta_1 + \theta_2)\pi)$ astfel încât arcele P_0P_1 ; P_0P_2 și P_0P sunt orientate în sens opus rotației acelor de ceasornic și lungimile arcelor P_0P_1 și P_0P_2 se reprezintă astfel: $|\overline{P_0P_1}| = 2\theta_1\pi$; $|\overline{P_0P_2}| = 2\theta_2\pi$.

Dacă $0 < \theta_1 + \theta_2 < 1$, ceea ce are loc cel puțin în cazurile când P_1 și P_2 aparțin semicercului situat în cadranele 1 și 2, atunci lungimea arcului P_0P se reprezintă prin formula:

$$|\overline{P_0P}| = 2(\theta_1 + \theta_2)\pi = 2\theta_1\pi + 2\theta_2\pi = |\overline{P_0P_1}| + |\overline{P_0P_2}|.$$

Dacă însă $1 \leq \theta_1 + \theta_2 < 2$, ceea ce are loc în cazurile când punctele P_1 și P_2 aparțin semicercului situat în cadranele 3 și 4, atunci $|\overline{P_0P}| = 2(\theta_1 + \theta_2)\pi = 2(\theta_1 + \theta_2 - 1)\pi + 2\pi$, unde $0 < \theta_1 + \theta_2 - 1 < 1$. În acest caz arcul P_0P acoperă cercul, dar la fel se reprezintă și suma $|\overline{P_0P_1}| + |\overline{P_0P_2}| = 2\theta_1\pi + 2\theta_2\pi = 2(\theta_1 + \theta_2)\pi = 2(\theta_1 + \theta_2 - 1)\pi + 2\pi$.

Deci și în acest caz avem $|\overline{P_0P}| = |\overline{P_0P_1}| + |\overline{P_0P_2}|$.

Considerăm acum pe cercul trigonometric punctul

$P'_1(\cos x, -\sin x)$, simetric cu punctul $P_1(\cos x, \sin x)$ față de axa

Ox și deci $|\overline{P'_1P_0}| = |\overline{P_0P_1}|$. Prin urmare

$$|\overline{P'_0P}| = |\overline{P_0P_1}| + |\overline{P_0P_2}| = |\overline{P'_1P_0}| + |\overline{P_0P_2}| = |\overline{P'_1P_2}|.$$

Din egalitatea lungimii arcelor P_0P și $P_1'P_2$ rezultă egalitatea coardelor respective. Astfel

$$\begin{aligned} |P_0P| &= \sqrt{(\cos(x+t) - 1)^2 + \sin^2(x+t)} = \\ &= \sqrt{(\cos x - \cos t)^2 + (\sin x + \sin t)^2} = |P_1'P_2|. \end{aligned}$$

Din această egalitate obținem:

$$\cos(x+t) = \cos x \cos t - \sin x \sin t. \quad (1)$$

Substituim t prin $-t$ și obținem:

$$\cos(x-t) = \cos x \cos t + \sin x \sin t \quad (2)$$

Pentru a deduce formula sinusului sumei vom utiliza valorile $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ și $\sin \frac{\pi}{2} = 1$. Astfel,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos x + \sin \frac{\pi}{2} \cdot \sin x = \sin x.$$

În egalitatea $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ substituim x prin $\frac{\pi}{2} - x$ și obținem $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \cos x$.

Deducem acum formula sinusului sumei:

$$\begin{aligned} \sin(x+t) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (x+t)\right) = \\ &= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - t\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos t + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin t = \\ &= \sin x \cos t + \cos x \sin t \end{aligned}$$

$$\text{Astfel } \sin(x+t) = \sin x \cos t + \cos x \sin t \quad (3)$$

Substituim t prin $-t$ și obținem:

$$\sin(x - t) = \sin x \cos t - \cos x \sin t \quad (4)$$

Din formulele stabilite, deducem celelalte relații între sinus și cosinus. De exemplu, din egalitățile $\cos \pi = -1$ și $\sin \pi = 0$ rezultă relația $\sin(\pi + t) = \sin \pi \cos t + \cos \pi \sin t = -\sin t$.

Considerăm în (1) și (3) $x=t$ și avem

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x; \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x. \quad (5)$$

Dacă în formula $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ substituim $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, obținem

$$1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x. \quad (6)$$

Dacă însă în aceeași formulă substituim $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, obținem

$$1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x, \quad x \in \mathbb{R} \quad (7)$$

6. Transformarea sumei algebrice în produse

În paragraful 5 am reprezentat sinusul și cosinusul sumei algebrice a două numere reale prin suma algebrică a produselor acestor funcții. Acum vom reprezenta suma algebrică a acestor funcții prin produsele lor.

Adunăm parte cu parte identitățile (1) și (2) din paragraful 5 și obținem

$$\cos(x+t) + \cos(x-t) = 2 \cos x \cos t.$$

Notăm $x+t = \alpha$, iar $x-t = \beta$ și aflăm $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$, $t = \frac{\alpha - \beta}{2}$. Astfel,

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}. \quad (1)$$

Dacă din identitatea (1) scadem identitatea (2), atunci avem $\cos(x+t) - \cos(x-t) = -2 \sin x \sin t$ sau

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}. \quad (2)$$

Ne referim în continuare la identitățile (3) și (4). Adunând (3) și (4) obținem $\sin(x+t)+\sin(x-t)=2\sin x \cos t$ sau

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}. \quad (3)$$

Substituim în (3) β prin $-\beta$ și avem

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}. \quad (4)$$

Exerciții.

1. Să se demonstreze că dacă $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, atunci $\sin(\alpha + \beta) = \sin \gamma$,
 $\cos(\alpha + \beta) = -\cos \gamma$, $\sin 2(\alpha + \beta) = -\sin 2\gamma$, $\cos 2(\alpha + \beta) = \cos 2\gamma$ și

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}.$$

2. Să se transforme în produs suma $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x$.
3. Să se demonstreze identitățile:

$$2 \sin 2x \cdot \sin 4x + \cos 6x = \cos 2x;$$

$$\sin^3 x \cos^2 x = \frac{1}{8} \sin x - \frac{1}{16} \sin 5x + \frac{1}{16} \sin 3x;$$

$$\sin 5x \cos 3x \cos 6x = \frac{1}{4} (\sin 14x + \sin 8x + \sin 2x - \sin 4x);$$

4. Să se demonstreze că dacă $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\pi$, atunci

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma + \sin \delta = 4 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \sin \frac{\alpha + \gamma}{2},$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma - \cos^2 \delta = 2 \sin(\alpha + \gamma) \sin(\beta + \gamma) \sin(\alpha + \beta).$$

5. Să se demonstreze că pentru orice $x \in \mathbf{R}$ și orice $n \in \mathbf{N}^*$ sunt adevărate identitățile:

$$\cos x \cos 2x \cos 2^2 x \dots \cos 2^{n-1} x = \frac{\sin 2^n x}{2^n \sin x},$$

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx = \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \cos \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2},$$

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx = \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \sin \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2}.$$

7. Transformarea produselor în sume

Revenim la formulele 1,2,3 și 4 din paragraful 5.

Aceste formule sunt următoarele :

$$\cos(x + t) = \cos x \cos t - \sin x \sin t \quad (1)$$

$$\cos(x - t) = \cos x \cos t + \sin x \sin t \quad (2)$$

$$\sin(x + t) = \sin x \cos t + \cos x \sin t \quad (3)$$

$$\sin(x - t) = \sin x \cos t - \cos x \sin t \quad (4)$$

Adunăm identitățile (1) și (2) și obținem

$$2\cos x \cos t = \cos(x + t) + \cos(x - t)$$

$$\text{sau } \cos x \cos t = \frac{1}{2} [\cos(x + t) + \cos(x - t)]$$

Adunăm identitățile (3) și (4) și obținem

$$2\sin x \cos t = \sin(x + t) + \sin(x - t) \text{ sau } \sin x \cos t = \frac{1}{2} [\sin(x + t) + \sin(x - t)]$$

Dacă din identitatea (2) scădem (1) avem

$$2\sin x \sin t = \cos(x - t) - \cos(x + t)$$

Dacă din identitatea (3) scădem identitatea (4) obținem

$$2\cos x \sin t = \sin(x + t) - \sin(x - t)$$

Acestea sunt formulele de transformare a produselor în sume și diferențe.

Aceste formule au aplicații în calculul integral.

considerăm în (1) $x = \frac{3\pi}{2}$ și obținem

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + t\right) = \cos \frac{3\pi}{2} \cos t - \sin \frac{3\pi}{2} \sin t = \sin t, \text{ iar din (3) obținem}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \sin \frac{\pi}{2} \cos t + \cos \frac{\pi}{2} \sin t = \cos t.$$

8. Intervalele de monotonie și de convexitate ale funcțiilor sinus și cosinus

S-a demonstrat că funcțiile $\sin$ și $\cos$ sunt periodice și atunci nu pot fi nici monotone, nici convexe (concave) pe mulțimea $\mathbf{R}$.

Să determinăm intervalele pe care funcțiile $\sin$ și $\cos$ sunt monotone, precum și intervalele pe care aceste funcții sunt convexe.

1. Pe intervalul $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ funcția $\sin$ este strict crescătoare, iar

pe intervalul $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ această funcție este descrescătoare.

Demonstrație. Considerăm punctele arbitrare x_1 și x_2 astfel încât $-\frac{\pi}{2} \leq x_1 < x_2 \leq \frac{\pi}{2}$. Deoarece $\cos \frac{x_1 + x_2}{2} > 0$, iar $\sin \frac{x_1 - x_2}{2} < 0$, avem

$$\sin x_1 - \sin x_2 = 2 \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \cos \frac{x_1 + x_2}{2} < 0. \quad (1)$$

Astfel, $\sin x_1 < \sin x_2$ și, prin urmare, funcția $\sin$ pe intervalul $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ este strict crescătoare. Această funcție este periodică de perioada principală 2π și atunci ea este strict crescătoare pe orice interval $\left[-\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right]$, $n \in \mathbf{Z}$.

Pentru punctele arbitrare x_1 și x_2 , $\frac{\pi}{2} \leq x_1 < x_2 \leq \frac{3\pi}{2}$, avem $\cos \frac{x_1 + x_2}{2} < 0$ și $\sin \frac{x_1 - x_2}{2} < 0$. Ca urmare, din (1) obținem $\sin x_1 > \sin x_2$. Deci funcția $\sin$ pe intervalul $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ este strict

descrescătoare și, fiind periodică, ea este strict descrescătoare pe intervalele $\left[\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right], n \in \mathbb{Z}$.

Din identitatea $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ conchidem că funcția $\cos$ este strict crescătoare pe intervalul $[-\pi, 0]$ și strict descrescătoare pe intervalul $[0, \pi]$. Luând în considerație că funcția $\cos$ este și ea periodică de aceeași perioadă principală 2π , conchidem că această funcție este strict crescătoare pe intervalele $[-\pi + 2n\pi, 2n\pi]$ și descrescătoare pe intervalele $[2n\pi, (2n+1)\pi], n \in \mathbb{Z}$.

1. Funcția $\sin$ pe intervalul $[0, \pi]$ este concavă, iar pe intervalul $[-\pi, 0]$ această funcție este convexă.

Demonstrație. Fie x_1 și x_2 două puncte arbitrare astfel încât $0 \leq x_1 < x_2 \leq \pi$. Deoarece $0 \leq \cos \frac{x_1 - x_2}{2} < 1$, obținem

$$\sin x_1 + \sin x_2 = 2 \sin \frac{x_1 + x_2}{2} \cos \frac{x_1 - x_2}{2} < 2 \sin \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Prin urmare, funcția $\sin$ este concavă pe intervalul $[0, \pi]$ și, fiind impară, această funcție pe intervalul $[-\pi, 0]$ este convexă. Funcția $\sin$ este periodică de perioada principală 2π și deci ea este concavă pe intervalele $[2n\pi, (2n+1)\pi]$ și convexă pe intervalele $[(2n-1)\pi, 2n\pi], n \in \mathbb{Z}$.

Din identitatea $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ conchidem că funcția $\cos$ este concavă pe intervalele $\left[-\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right]$ și convexă pe intervalele $\left[\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right]$.

În *fig. 40* este trasat graficul funcției $\sin$, iar în *fig. 41* este trasat graficul funcției $\cos$.

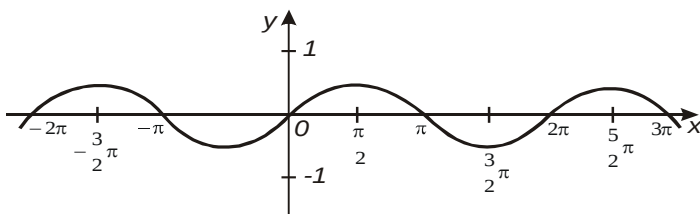


Fig. 40

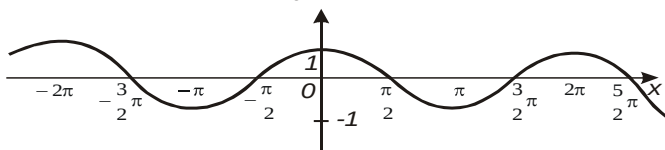


Fig. 41

În continuare ne vom referi la relația dintre x și $\sin x$.

Dacă $P_0(1;0)$ este punctul de intersecție al cercului trigonometric cu semiaxa pozitivă Ox , atunci pentru orice punct $P(u;v)$, situat pe arcul din primul cadran al cercului, lungimea arcului P_0P este $2\theta\pi$ unde $0 < \theta < \frac{1}{4}$. Evident că ordonata $v = \sin x$ a punctului $P(u;v)$ este mai mică decât lungimea $x = 2\theta\pi$ a arcului P_0P . Astfel, avem $v = \sin x < 2\theta\pi = x$ sau $\sin x < x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Pentru $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ avem $0 < -x < \frac{\pi}{2}$ și în acest caz

$|\sin x| = -\sin x = \sin(-x) < -x = |x|$. Deoarece $\sin 0 = 0$, pentru $|x| < \frac{\pi}{2}$

este adevărată relația $|\sin x| \leq |x|$. Pentru $|x| \geq \frac{\pi}{2}$ evident $|\sin x| < |x|$.

Astfel, $|\sin x| \leq |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Orice $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ verifică inegalitatea $\sin x > \frac{2}{\pi}x$.

Într-adevăr, pe intervalul $[0, \frac{\pi}{2}]$ funcția $\sin$ este concavă și

atunci pentru $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ avem $\frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} > \frac{\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0}{\frac{\pi}{2} - 0}$, de unde

obținem $\sin x > \frac{2}{\pi}x$. Astfel, pentru funcția $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

descrescătoare pe semiintervalul $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ are loc relația

$$\frac{2}{\pi} < \frac{\sin x}{x} < \frac{x}{x} = 1. \text{ Prin urmare, în punctul } x=0 \text{ există limita}$$

laterelă de dreapta $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$. Deoarece această funcție este

pară, avem $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Notă. În baza graficului funcției f , $f(x) = \sin x$ sau $f(x) = \cos x$, se poate construi graficul funcțiilor date prin formulele: $f(x) = A \sin(ax+b)$ sau $f(x) = A \cos(ax+b)$.

În acest scop efectuăm trei operații în ordinea:

1. construim curba $y = \sin ax$ – efectuăm o deformare, comprimare a curbei $y = \sin x$ în direcția axei Ox cu coeficientul de comprimare a ;
2. construim curba $y = \sin(ax+b)$ – efectuăm o deplasare a curbei $y = \sin ax$ în direcția axei Ox , spre dreapta, dacă $b < 0$, și spre stânga, dacă $b > 0$;
3. construim curba $y = A \sin(ax+b)$ – efectuăm o deformare, comprimare a curbei $y = \sin(ax+b)$ în direcția axei Oy cu coeficientul de comprimare egal cu A .

Exerciții. Să se construiască graficul funcției $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, dacă sunt date graficele funcțiilor $\sin$ și $\cos$:

$$f(x) = \sin 2x;$$

$$f(x) = \sin(2x-1);$$

$$f(x) = 2 \sin(2x-1);$$

$$f(x)=\cos 3x; \quad f(x)=\cos(3x+1); \quad f(x)=-2\cos(3x+1).$$

Să demonstrăm unele inegalități cu funcții trigonometrice.

1. Să se arate că $\sin x + \cos x < \frac{\pi}{2}$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.

Rezolvare. Pentru orice $x \in \mathbf{R}$ avem

$$\begin{aligned} \sin x + \cos x &= \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \\ &= \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2} < \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

2. Să se demonstreze că pentru orice $x \in \mathbf{R}$ se verifică inegalitatea $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$.

Rezolvare. Pentru orice $x \in \mathbf{R}$ avem

$$\begin{aligned} \cos(\sin x) - \sin(\cos x) &= \cos(\sin x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \cos x\right) = \\ &= 2 \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \sin x - \cos x}{2}\right) \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} - \sin x - \cos x}{2}\right) > 0. \end{aligned}$$

3. Să se arate că $|\sin nx| \leq n|\sin x|$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.

Rezolvare. Se observă că pentru $n=1$ inegalitatea se verifică cu semnul egal. Presupunem că pentru un $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$, avem $|\sin nx| \leq n|\sin x|$ și aplicăm inducția după n . Obținem

$$\begin{aligned} |\sin(n+1)x| &= |\sin(nx + x)| = |\sin nx \cos x + \cos nx \sin x| \leq \\ &\leq |\sin nx| |\cos x| + |\cos nx| |\sin x| \leq |\sin nx| + |\sin x| \leq \\ &\leq n|\sin x| + |\sin x| = (n+1)|\sin x|. \end{aligned}$$

4. Să se demonstreze că pentru orice $x \in \mathbf{R}$ și orice $n \in \mathbf{N}^*$ se verifică inegalitatea $\left| \sum_{k=1}^{n-1} \sin(2k+1)x \right| \leq (n^2 - 1)|\sin x|$.

Rezolvare. Pentru $n=2$ din exemplul 3 obținem

$$|\sin 3x| \leq 3|\sin x| = (2^2 - 1)|\sin x|.$$

Presupunem că inegalitatea cerută se verifică pentru un $n > 2$ și să arătăm că ea se verifică și pentru $n+1$, adică

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin(2k+1)x \right| \leq ((n+1)^2 - 1)|\sin x|.$$

Se aplică inegalitatea demonstrată în *exemplul 3*. Avem

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n \sin(2k+1)x \right| &= \left| \sum_{k=1}^{n-1} \sin(2k+1)x + \sin(2n+1)x \right| \leq \left| \sum_{k=1}^{n-1} \sin(2k+1)x \right| + \\ &+ |\sin(2n+1)x| \leq (n^2 - 1)|\sin x| + (2n+1)|\sin x| = ((n+1)^2 - 1)|\sin x|. \end{aligned}$$

5. Să se demonstreze că pentru oricare două valori din intervalul

$$[0, \pi] \text{ se verifică inegalitatea } \sqrt{\sin x_1 \sin x_2} \leq \sin \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Rezolvare. Deoarece funcția $\sin$ este concavă pe intervalul $[0, \pi]$, pentru valorile arbitrare $x_1, x_2 \in [0, \pi]$, $x_1 \neq x_2$, avem

$$2\sqrt{\sin x_1 \sin x_2} \leq \sin x_1 + \sin x_2 < 2\sin \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

În continuare, vom rezolva următorul exercițiu evitând utilizarea relației dintre media geometrică și media aritmetică.

6. Să se demonstreze că pentru oricare două valori din

$$\text{intervalul } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \text{ se verifică inegalitatea}$$

$$\sqrt{\cos x_1 \cos x_2} \leq \cos \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

7. Să se demonstreze că funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x - \sin x$, este strict crescătoare.

Indicație. Considerăm valorile arbitrare $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 < x_2$, și avem $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - \sin x_2) - (x_1 - \sin x_1) =$

$$= (x_2 - x_1) \left(1 - \frac{\sin x_2 - \sin x_1}{x_2 - x_1} \right) = (x_2 - x_1) \left(1 - \frac{\sin \frac{x_1 - x_2}{2}}{\frac{x_1 - x_2}{2}} \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \right) > 0.$$

Funcția dată este convexă
pe intervalele $[2n\pi, (2n+1)\pi]$, și
concavă pe intervalele
 $[(2n-1)\pi, 2n\pi]$, $n \in \mathbb{N}$ (fig. 41').

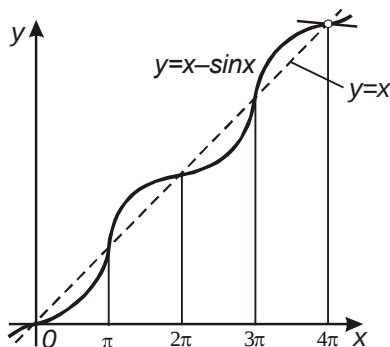


Fig. 41'

9. Funcțiile trigonometrice tg și ctg

Se numește *tangentă trigonometrică* și se notează cu tg funcția definită prin formula $tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Din definiție rezultă unele proprietăți ale funcției tg .

1. Funcția tg este impară.

Într-adevăr, pentru orice $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, avem

$$tg(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -tgx.$$

2. Funcția tg este periodică și numărul π este perioada principală a acestei funcții.

Într-adevăr, pentru orice $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$ avem

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x.$$

Nici un număr l , $0 < l < \pi$, nu este perioadă a funcției tg . Pentru a ne convinge, considerăm $x=0$ și avem $\operatorname{tg}(0+l)=\operatorname{tg} l \neq 0 = \operatorname{tg} 0$, ceea ce înseamnă că numărul l nu este perioadă a funcției tg .

3. Pe intervalul $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ funcția tg este strict crescătoare.

Într-adevăr, pe intervalul $[0, \frac{\pi}{2})$ funcția tg este strict crescătoare,

deoarece pe acest interval ea reprezintă raportul dintre funcția strict crescătoare și pozitivă $\sin$ și funcția strict descrescătoare și pozitivă $\cos$. Funcția tg este impară și, prin urmare, ea este strict crescătoare

pe intervalul $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Întrucât funcția tg este periodică cu perioada $n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, ea este strict crescătoare pe intervalele $(-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi)$.

4. Pe intervalul $[0, \frac{\pi}{2})$ funcția tg este convexă, iar pe intervalul

$(-\frac{\pi}{2}, 0]$ această funcție este concavă.

Demonstrație. Considerăm două valori arbitrare x_1 și x_2 astfel încât $0 \leq x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ și avem

$$2\operatorname{tg} \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2\sin(x_1 + x_2)}{1 + \cos(x_1 + x_2)} < 2 \frac{\sin(x_1 + x_2)}{\cos(x_1 - x_2) + \cos(x_1 + x_2)} = \operatorname{tg} x_1 + \operatorname{tg} x_2.$$

Prin urmare, funcția tg pe intervalul $[0, \frac{\pi}{2})$ este convexă.

Întrucât această funcție este impară, pe intervalul $(-\frac{\pi}{2}, 0]$ ea este concavă.

Funcția tg pe semisegmentul $[0, \frac{\pi}{2})$ este nemărginită superior.

Într-adevăr, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} tg x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin x}{\cos x} = +\infty$. Deoarece funcția tg este impară, apoi $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} tg x = -\infty$.

6. Funcția $tg: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbf{R}$, strict crescătoare pe intervalul $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, are mulțimea valorilor intervalului $(-\infty, \infty)$.

În fig. 42 este reprezentat graficul funcției tg .

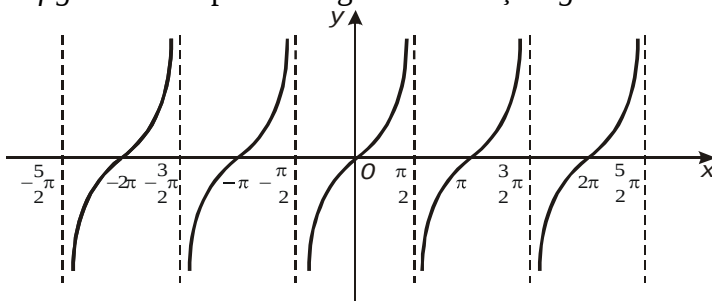


Fig. 42

Se numește *cotangenta trigonometrică* și se notează cu ctg funcția definită prin formula $ctg x = \frac{\cos x}{\sin x}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{n\pi\}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Funcția ctg este periodică de perioada principală π , este impară și strict descrescătoare pe tot domeniul ei de definiție, care constă din intervalele de forma $(n\pi, (n+1)\pi)$, $n \in \mathbf{Z}$.

Pe semiintervalul $(0, \frac{\pi}{2}]$ funcția ctg este convexă, iar pe semisegmentul $[\frac{\pi}{2}, \pi)$ această funcție este concavă. În fig. 43 este reprezentat graficul funcției ctg .

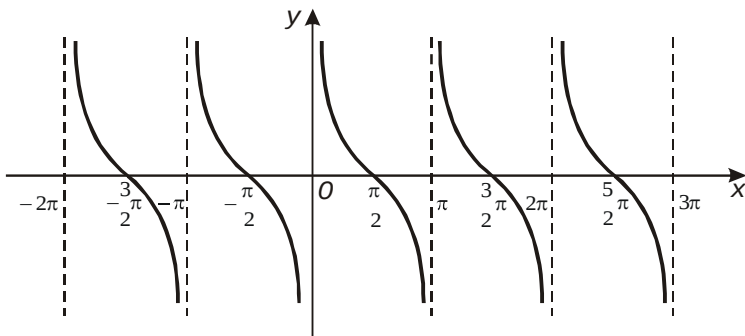


Fig. 43

În continuare vom scoate în evidență unele relații dintre funcțiile trigonometrice $\sin$, $\cos$, tg și ctg .

1. Dacă numerele x , y și $x+y$ aparțin domeniului de definiție al

$$\text{funcției } tg, \text{ atunci } tg(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}.$$

Împărțim numărătorul și numitorul fracției din partea dreaptă la produsul $\cos x \cos y \neq 0$ și obținem

$$tg(x+y) = \frac{tgx + tgy}{1 - tgx tgy}. \quad (1)$$

Înlocuim în această formulă y prin $-y$ și avem

$$tg(x-y) = \frac{tgx - tgy}{1 + tgx tgy}. \quad (2)$$

Pentru $x=y$ din (1) obținem

$$tg 2x = \frac{2tgx}{1 - tg^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Din formulele $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$ și $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$

obținem $tg^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$, de unde rezultă

$$tg x = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}}. \quad (3)$$

Pentru $x = \frac{t}{2}$ avem

$$tg \frac{t}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos t}{1 + \cos t}}. \quad (4)$$

Din (4) sau prin verificare directă obținem formulele:

$$\cos t = \frac{1 - tg^2 \frac{t}{2}}{1 + tg^2 \frac{t}{2}} \quad \text{și} \quad \sin t = \frac{2tg \frac{t}{2}}{1 + tg^2 \frac{t}{2}}. \quad (5)$$

Similar se deduc și alte relații dintre funcțiile trigonometrice $\sin$, $\cos$, tg și ctg .

Exerciții. Să se demonstreze identitățile:

$$1. \cos 2x - ctg \left(\frac{\pi}{4} + x \right) = \sin 2x ctg \left(\frac{\pi}{4} + x \right), \quad x \neq -\frac{\pi}{4} + n\pi.$$

$$2. \left(\frac{2}{1 + tg x} + tg 2x \right) \left(\cos^2 x - \frac{1}{2} \right) = \cos^2 x, \quad x \neq -\frac{\pi}{4} + n\pi.$$

$$3. \frac{\cos x - \cos 3x}{\sin x + \sin 3x} = tg x, \quad x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}.$$

$$4. \frac{\cos x - \cos 3x + \cos 5x - \cos 7x}{\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x} = tg x, \quad x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}.$$

$$5. \frac{\cos x - \cos 2x - \cos 4x + \cos 5x}{\sin x - \sin 2x - \sin 4x + \sin 5x} = ctg 3x, \quad x \neq n\frac{\pi}{3} + n\pi.$$

$$6. \frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin^2 x} + \dots + \frac{1}{\sin 2^n x} = ctg x - ctg 2^n x, \quad x \neq n\pi.$$

Notă: Formulele 5 se numesc substituții universale și sunt efectiv utilizate în calculul integral.

10. Funcțiile trigonometrice inverse

În paragrafele 8 și 9 am determinat intervalele pe care funcțiile $\sin$, $\cos$, tg și ctg sunt strict monotone, precum și mulțimea valorilor lor pe aceste intervale. Vom defini acum funcțiile inverse în raport cu funcțiile menționate.

1. *Funcția arcsin.* Funcția $\sin: [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbf{R}$ este strict crescătoare, impară și are mulțimea valorilor intervalul $[-1; 1]$. Prin urmare, pe intervalul $[-1; 1]$ este definită funcția inversă în raport cu funcția $\sin$ și se notează $\arcsin: [-1; 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, $f(x) = \arcsin x$, $\arcsin 0 = 0$. Pe segmentul $[0; \frac{\pi}{2}]$ funcția $t = \sin x$ este concavă, crescătoare și are mulțimea valorilor $[0; 1]$.

Potrivit definiției noțiunii de concavitate a funcției pentru oarecare două valori diferite x_1 și x_2 de pe segmentul $[0; \frac{\pi}{2}]$ avem

$$t_1 = \sin x_1, \quad t_2 = \sin x_2 \quad \text{și} \quad \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{\sin x_1 + \sin x_2}{2} < \sin \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Din aceasta inegalitate obținem

$$\arcsin \frac{t_1 + t_2}{2} < \arcsin \left(\sin \frac{x_1 + x_2}{2} \right) = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\arcsin t_1 + \arcsin t_2}{2}$$

ceea ce înseamnă că funcția $x = \arcsin t$ pe segmentul $[0; 1]$ este convexă. Această funcție este impară și atunci pe segmentul $[-1; 0]$ ea este concavă.

În figura 44 este reprezentat graficul funcției

$$\arcsin: [-1; 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$$

În fig. 45 avem graficul funcției $\arccos: [-1; 1] \rightarrow \mathbf{R}$.

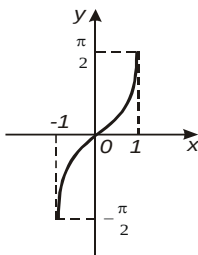


Fig. 44

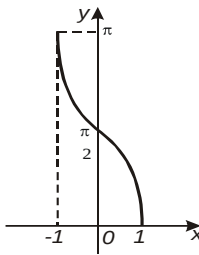


Fig. 45

2. *Funcția arccos.* Funcția $\cos: [0; \pi] \rightarrow \mathbf{R}$ este strict descrescătoare și are mulțimea valorilor segmentul $[-1; 1]$. Prin urmare, pe segmentul $[-1; 1]$ este definită funcția inversă în raport cu funcția $\cos$ și se notează $\arccos: [-1; 1] \rightarrow [0; \pi]$, $f(x) = \arccos x$. Funcția $\arccos: [-1; 1] \rightarrow [0; \pi]$, $f(x) = \arccos x$, este strict descrescătoare și are mulțimea valorilor segmentul $[0; \pi]$.

Funcția arctg. Funcția $tg: (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbf{R}$ este strict crescătoare,

impară și are mulțimea valorilor intervalul $(-\infty, \infty)$. Prin urmare, pe intervalul $(-\infty, \infty)$ este definită funcția inversă în raport cu funcția

tg și se notează: $\arctg: (-\infty, \infty) \rightarrow (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, $f(x) = \arctg x$. Pe

semisegmentul $[0; \frac{\pi}{2})$ funcția $t = tg x$ este convexă, crescătoare și

are mulțimea valorilor semisegmentul $[0; \infty)$

Potrivit definiției noțiunii de convexitate a funcției pentru

oarecare două valori diferite x_1 și x_2 din $[0; \frac{\pi}{2})$ avem

$$t_1 = tg x_1; t_2 = tg x_2 \text{ și } \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{tg x_1 + tg x_2}{2} > tg \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Din această inegalitate obținem

$$\arctg \frac{t_1 + t_2}{2} > \arctg (tg \frac{x_1 + x_2}{2}) = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\arctg t_1 + \arctg t_2}{2}$$

cea ce înseamnă că funcția $x=\arctgt$ pe semisegmentul $[0; \infty)$ este concavă. Această funcție este impară și atunci pe semintervalul $(-\infty; 0]$ ea este convexă. În figura 46 este trasat graficul funcției

$$\arctg: (-\infty; \infty) \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

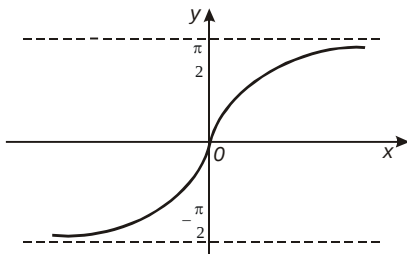


Fig. 46

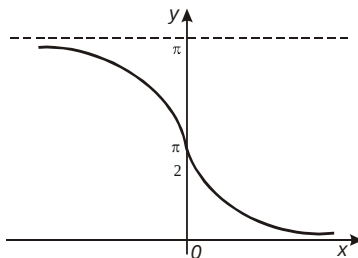


Fig. 47

Similar se constată că pe intervalul $(-\infty; \infty)$ este definită funcția inversă în raport cu funcția ctg și această funcție inversă se notează $\text{arcctg}: (-\infty; \infty) \rightarrow (0; \pi)$, $f(x) = \text{arcctg}x$. Funcția arcctg este strict descrescătoare, pe intervalul $(-\infty; 0]$ este concavă, iar pe intervalul $[0; \infty)$ această funcție este convexă. În fig. 47 este reprezentat graficul funcției $\text{arcctg}: (-\infty; \infty) \rightarrow (0; \pi)$.

Exerciții

1. Să se determine care dintre funcțiile $f:D \rightarrow \mathbf{R}$ este pară, impară, nici pară, nici impară:

$$1) f(x) = \arcsin x + \sin x - \arctg x, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

$$2) f(x) = \frac{x + \arcsin x}{\arctg x}, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad x \neq 0.$$

$$3) f(x) = \frac{x}{\arcsin x} - x \arctg x, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad x \neq 0.$$

$$4) f(x) = \frac{\arcsin x}{\arccos x} + x, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

$$5) f(x) = \frac{\arctg x}{x} - x \arccos x, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad x \neq 0.$$

2. Să se demonstreze egalitățile:

$$1) \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad |x| \leq 1.$$

$$2) \sin(\arctg x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

$$3) \tg(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad |x| < 1.$$

$$4) \cos(\arctg x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

$$5) \tg(\arccos x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}, \quad |x| \leq 1, \quad x \neq 0.$$

$$6) \arcsin x = \arctg \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad |x| < 1.$$

$$7) \arctg x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Exerciții. Să se demonstreze că pentru orice x , din $-1 \leq x \leq 1$, este justă egalitatea $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, iar pentru $-\infty < x < \infty$ este justă egalitatea $\arctg x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$.

Pentru a demonstra prima egalitate, se consideră un punct arbitrar x , $-1 \leq x \leq 1$, se notează $\arccos x = t$, unde $0 \leq t \leq \pi$,

și deci $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - t \leq \frac{\pi}{2}$. Din egalitatea $x = \cos t = \sin(\frac{\pi}{2} - t)$ se obține $\frac{\pi}{2} - t = \arcsin x$ sau $\frac{\pi}{2} - \arccos x = \arcsin x$.

3. Să se demonstreze că funcția $\arccos: [-1; 1] \rightarrow \mathbf{R}$ pe intervalul $[-1; 0]$ este convexă, iar pe intervalul $[0; 1]$ este concavă.

Să se demonstreze că funcția arcctg , pe intervalul $(-\infty; 0]$ este concavă, iar pe intervalul $[0; \infty)$ această funcție este convexă.

Notă. O problemă aparține în această lucrare definiția numărului π . Am făcut mai multe încercări și eforturi pentru a demonstra că șirul respectiv este crescător, și, în cele din urmă, am fost nevoit să mă opresc la textul expus în lucrare, deși am căutat metode mai simple.

Să revenim pe scurt la istoria numărului π , număr care pe parcursul a mai multe mii de ani a frământat mințile multor generații de matematicieni. S-au scris cărți despre istoria acestui număr. De-a lungul timpului savanții au completat partea zecimală a numărului π cu noi și noi cifre zecimale.

Strămoșii noștri matematicieni care au trăit și au muncit în vremurile demult apuse calculau cifrele zecimale ale numărului π folosind perimetrele poligoanelor regulate înscrise într-un cerc. Prin dublarea tuturor laturilor unui poligon regulat înscris într-un cerc, astfel încât fiecare latură se împarte în jumătate, se obține un nou poligon regulat înscris în acest cerc a cărui perimetru este mai mare decât perimetrul poligonului precedent. Respectând această regulă conchidem că orice

poligon regulat înscris într-un cerc generează un șir de poligoane regulate înscrise în acest cerc astfel încât fiecare poligon următor are perimetrul mai mare decât perimetrul poligonului premergător. De menționat că două poligoane regulate, cu numere prime de laturi, înscrise într-un cerc, generează două șiruri de poligoane regulate înscrise în acest cerc, în care nu există două poligoane cu același număr de laturi.

De exemplu, un triunghi echilateral înscris într-un cerc de raza unu generează șirul de poligoane regulate înscrise în acest cerc în care perimetrul poligonului de rangul n este

$$\left(3 \cdot 2^n \sin \frac{360^\circ}{3 \cdot 2^n} \right) = 2 \left(3 \cdot 2^{n-1} \sin \frac{180^\circ}{3 \cdot 2^{n-1}} \right)$$

La fel un pentagon regulat înscris într-un cerc, de raza egală cu unu, generează un șir de poligoane regulate înscrise în acest cerc în care perimetrul poligonului de rangul n este

$$\left(5 \cdot 2^n \sin \frac{360^\circ}{5 \cdot 2^n} \right) = 2 \left(5 \cdot 2^{n-1} \sin \frac{180^\circ}{5 \cdot 2^{n-1}} \right)$$

Ambele aceste două șiruri au aceeași limită 2π .

Remarcă. Republica Moldova odată cu rezolvarea acestei probleme intră în istoria științei ca țara în care s-a rezolvat cea mai veche și controversată problemă din istoria omenirii. Istoria nu dispune de date în ce țară sau în ce trib și în ce mileniu s-a formulat această problemă. Este cunoscut doar că de-a lungul secolelor matematicienii tuturor timpurilor s-au aflat mereu în căutare unei soluții pentru această problemă. Dar munca lor în majoritatea cazurilor se reducea la calcularea cifrelor zecimale ale numărului π ceea ce nu contribuia cu nimic la rezolvarea problemei.

Autorul exprimă o deosebită recunoștință d-lui Ion Brînză, pentru publicarea aceste lucrări, dar și pentru grija deosebită la așezarea fiecărei fraze în textul lucrării.

Date din activitatea pedagogică-științifică a autorului

Născut la 3 septembrie 1926 în comuna Rotunda, plasa Edineț, unde mi-am petrecut copilăria și am absolvit școala primară. După absolvirea școlii, la propunerea învățătoarei mele de atunci, Eugenia Petrov, părinții mi-au satisfăcut dorința de a pleca la Iași pentru a susține examene de admitere la liceu. În vara anului 1938 am susținut cu succes examenele și astfel am devenit primul licean în istoria satului Rotunda. Din cauza războiului însă nu am absolvit liceul și în 1948 am absolvit școala media de cultură generală din Edineț. Am susținut examenele de maturitate într-un centru special în orașelul Lipcani. În septembrie 1948 am fost numit învățător de matematică la gimnaziul din satul Brânzeni, unde am lucrat doi ani, după care, în 1950, m-am transferat la gimnaziul din satul natal Rotunda. La acea vreme directorul gimnaziului din Rotunda nu avea nici măcar studii gimnaziale. Procesul de instruire era la un nivel scăzut, învățătorii străini veneau în sat, lucrau un an-doi și plecau – situația care s-a creat în școală m-a pus pe gânduri. Pornind de la faptul că în școală lipseau învățători băștinași, pentru a schimba lucrurile spre bine și luând în considerație că în 1952 absolvisem anul trei la facultatea de matematică, am hotărât să plec de la serviciu pentru a termina facultatea. În 1954 am absolvit facultatea de matematică, am primit diploma de „eminent” (echivalentul în limba română a diplomei de „otlicinic”) și am fost repartizat la serviciu la Universitatea din Tiraspol, în calitate de conferențiar la catedra de analiză matematică. Astfel, mi-am creat posibilitatea de a schimba spre bine situația școlii din satul meu natal.

În cei doi ani de lucru la școala din Rotunda, am remarcat mai mulți elevi dotați și iubitori de muncă intelectuală. În vara anului 1955 am selectat 6 absolvenți ai școli medii dintre foștii mei elevi din Rotunda, i-am recomandat la diferite facultăți ale Universității din Tiraspol – toți au susținut cu succes examenele de

admitere și au devenit studenți. În vara anului 1956 am selectat încă 5 tineri din Rotunda, absolvenți ai școlii medii, care au fost înscriși la diferite facultăți ale aceleiași Universități din Tiraspol. După absolvirea facultății, 7 dintre cei 11 absolvenți au plecat să lucreze la gimnaziul din Rotunda, și astfel s-a rezolvat parțial problema cadrelor didactice. Drept urmare a luat naștere intelectualitatea băștinașă din satul Rotunda: mi s-a împlinit un vis. Pentru mult timp însă a rămas nerezolvată problema conducerii școlii. Chiar dacă directorul de altă dată nu mai era director, la conducerea de vârf a școlii se aranjau prin diferite mijloace persoane suspecte necompetente, nepregătite nici profesional, nici intelectual..



Pe parcursul anilor îmi făceam conștiințios datoria de pedagog la catedră, am terminat doctorantura și în 1964 am susținut doctoratul devenind astfel doctor în matematică; activitatea mea științifică a însumat circa 100 de lucrări publicate în țară și peste hotare, inclusiv 18 volume de carte de matematică. Sunt autorul primului manual de analiză matematică pentru universități publicat în Republica Moldova în grafie latină (Curs de Analiză Matematică. Editura Lumina, Chișinău, 1992). Fiind primul învățător băștinaș din satul Rotunda, primul om de știință, cu rădăcini adânci în acest sat, am considerat de datoria mea să ajut acestei comunități de țărani cinstiți și iubitori de muncă de a-și forma o intelectualitate din consătenii lor. Totodată pentru a susține material aspirația de progres spiritual a consătenilor mei, am donat din biblioteca mea personală în fondul bibliotecii din Rotunda un lot de câteva sute de volume de carte: romane, opere alese, poezii – creații din tezaurul literaturii universale. Îmi doresc mult ca intenția

și procesul căruia i-am pus începutul - trimiterea la studii a tinerilor dotați din satul meu natal - să nu înceteze niciodată. De aceea adresez un îndemn, chiar o poruncă pentru consătenii mei, dar care este valabilă pentru oricare comunitate de țărani. Nu lăsați copiii dotați la coarnele plugului, îndrumați-i să facă studii liceale, iar apoi și studii universitare. O parte dintre ei se vor întoarce la vatra părintească; vor fi învățători, profesori, medici, agronomi sau de alte profesii și, ca urmare, veți avea o intelectualitate băștinașă, veți avea măcar o jumătate din corpul didactic al școlii învățători și profesori băștinași care, mai mult decât alții, vor fi interesați să apere cu sfințenie onoarea școlii care este și onoarea satului. Având o intelectualitate băștinașă veți reuși să alegeți un primar instruit, înțelept și bun gospodar. Totodată această intelectualitate cu trecerea anilor se va perfecționa tot mai mult, devenind astfel un izvor de cultură, un exemplu de comportament onest pentru întreaga comunitate a satului. Numai așa veți dăinui peste secole cu demnitate și înțelepciune.

Sergiu Miron

Bibliografie

1. M.Niculescu. Analiza matematică, vol.1. București, Editura științifică și pedagogică, 1966.
2. S.Miron. Funcții elementare. Chișinău, Lumina, 1987.
3. CÎMPAN, F. *Istoria numărului π* . Editura Albatros, Cluj, România, 1977.
4. S.Miron. Elemente de analiză matematică. Chișinău, Editura Tehnica, 1998.
5. S.Miron. Șiruri și serii numerice. Chișinău, Lumina, 1980.
6. S.Miron. Limite și derivate. Chișinău, Lumina, 1982.
7. GRECO, P. Povestea numărului π . Editura Humanitas, România, 2019.
8. S.Miron. Calculul diferențial și integral. Chișinău, Editura Tehnica, 2009.
9. S.Miron. Curs de analiză matematică. Chișinău, Lumina, 1992
10. MIRON, S. Problema numărului π și altă construcție a trigonometriei. În: *Proceedings of the 26th Conference on applied and industrial mathematics*. Chișinău, 20-23 septembrie, 2018.
11. S.Miron. Teoria limitelor și calculul diferențial. Editura Spiru Haret, Iași, 2006.
12. S.Miron. Bazele analizei matematice. Chișinău, Editura Tehnica-Info, 2010.
13. S.Miron. Bazele analizei matematice. Chișinău, Editura Tehnica-Info, 2011.
14. S.Miron. Funcțiile elementare și altă construcție a trigonometriei. Chișinău, 2018.
15. S. Miron. Rezolvarea problemei milinare și trigonometria absolută. Chișinău, 2020.