

UTILIZAREA EXPRESIEI MATEMATICE A ARCULUI CATENAR ÎN INGINERIA ARHITECTURALĂ A BOLȚILOR

Oleg CAZAC, olegcazac@gmail.com
Olga HAREA, olga.harea@fua.utm.md
Otilia RUDIC, otilia.rudic@fua.utm.md

Abstract: *Catenara is considered one of the most harmonious forms in architecture. The use of the mathematical expression of the catenary spring provides an aesthetically pleasing appearance for the vaults, with an elegant curve and uniform stress distribution. The catenary is the ideal shape that a suspended chain takes under its own weight, being the result of a uniform distribution of compression forces. The catenary or inverted chain line has been used in architectural engineering since ancient times, with examples in structures such as vaults and arches of historical monuments. The complete solution of the catenary problem was one of the first applications of the differential calculus and represented a major breakthrough in applied mathematics and gave impetus to the widespread use of the catenary spring in architectural engineering.*

Keywords: *Catenary, suspended chain line, catenary spring, hyperbolic functions.*

I. Aplicarea matematicii, mecanicii și tehnologiei în arhitectură.

Construirea a fost una din cerințele primordiale ale Homo sapiens în istoria dezvoltării sale. El a observat natura în configurațiile ei infinite și evoluția continuă, culegând idei și indici pentru propriile sale activități, fie vânătoare, agricultură sau locuință. În acest lung proces evolutiv, omul a folosit puterile de raționament pentru a concepe forme abstracte sugerate de formele naturale și într-un proces îndelungat a apelat la natură pentru a-și aborda și rezolva propriile nevoi. Acest proces îndelungat, care a mers mână la mână cu dezvoltarea istorică a omului, nu s-ar fi putut realiza decât prin experimente repetate și raționalizarea lor constantă: în acest fel sau dezvoltat "regulile artei" în construire, prin eșecuri, modificări, succese și evoluții de-a lungul mileniilor.

Pentru a construi, omul antic avea nevoie de materiale, pe care le putea obține numai din natură. De aceea folosim acele materiale pe care, datorită existenței lor de-a lungul mileniilor le definim acum ca fiind

tradiționale: lut, lemn, varietate infinită de piatră, urmate de primele elaborări complexe: cărămizi arse, lianți și metale.

Forma lanțului inversat a fost folosită în arhitectură din cele mai vechi timpuri, cu exemple găsite în structuri precum bolti și arcade. Linia lanțului inversat are forma unui cordon suspendat, presupus a fi perfect flexibil și cu masa uniform distribuită pe lungimea sa. În practică, flexibilitatea și uniformitatea masei sunt realizate mai bine printr-un lanț suspendat, de unde și numele „catenar”, care provine din latinescul „catena” pentru lanț. În așa fel linia lanțului inversat poate fi numit arc catenar, este o figură matematică care apare atunci când o catenă uniformă este suspendată între două puncte de sprijin. Acesta formează un principiu care stă la baza sistemului general de bolti și arcade în monumentele antice, în catedralele gotice boltite din piatră și în clădirile renașcentiste. Un exemplu semnificativ timpuriu în acest sens este bolta Taq Kasra din Iran. Constructorii antici au descoperit empiric durabilitatea arcului catenar, acel tip de arc arhitectural care urmează o curbă catenară inversată.

Bolta **Taq Kasra**, [6] sunt rămășițele unui monument antic din secolul al VI-lea î.Hr., considerată un reper în istoria arhitecturii și este cea mai mare boltă de sine stătătoare, cu o singură tragă, din zidărie nearmată din lume. Sala acoperită de arcadă avea aproximativ 37 de metri înălțime, 26 de metri lățime și 50 de metri lungime, și este cea mai mare boltă de sine stătătoare construită de om până în timpurile moderne. (fig.1)



Figura 1. Arcada Tag Kasra

În clădirile religioase, putem găsi, de asemenea, utilizarea a arcadelor cu forma unei linii de lanț inversat. De exemplu, Catedrala Sf. Sofia din Kiev, care datează din secolul al XI-lea, are cupole cu arcade în lanț, care conferă clădirii un aspect caracteristic în stil Kiev.

De asemenea, utilizarea arcadelor cu forma unei linii de lanț poate fi văzută în clădirile arhitecturii barocului ucrainean. De exemplu, Mănăstirea lui Chiril din Kiev, care a fost construită în secolul al XVIII-lea, are un număr mare de arcade în linii de lanț inversat. Meșterii din vechime au descoperit empiric durabilitatea arcului catenar, acel tip de arc arhitectural care urmează o curbă catenară inversată.

În arhitectura medievală arca catenară a înlesnit construcția catedralei catolice, Santa Maria del Fiore din Florența, care este a cincea biserică ca mărime din Europa, după Catedralele Sfântului Petru din Roma, Sfântului Paul din Londra, catedrala din Sevilla și Domul din Milano. Are 153 de metri lungime, iar baza domului are 41,98 metri lățime și înălțimea cupolei 114 m de la podea. (fig. 2) Concepută în 1296, este finalizată în 1436, datorată remarcabilului inginer, arhitect, bijutier și matematician al Renașterii, Filippo Brunelleschi, singurul arhitect care a putut veni cu ideea unui design ingenios a acestei cupole imense, care a devenit o capodopera a artei ingineresti și unul dintre simbolurile remarcabile ale Florenței. Dificultatea majoră, pentru Brunelleschi, a fost imposibilitatea ridicării, așa cum făceau de obicei constructorii de catedrale, a schelelor în formă de arc, care să se modeleze bolta. Construcția de schele la o asemenea dimensiune și înălțime nu a fost fezabilă, din necesitatea unei cantități colosale de lemn, de care Florența nu dispunea. Brunelleschi a propus un experiment prea riscant, care excludea schelele. Arhitectorul a reușit să-i convingă pe locuitorilor orașului demonstrând o machetă în formă de linie inversată de lanț, creată la sfârșitul anului 1418 de către patru zidari la scara 1:12[9]. Bolta a fost executată din cărămizi asamblate și cimentate într-un mortar cu priză rapidă, formând linia unui „lanț inversat”. Cărămizile din plăci de piatră, orientate radial spre „puncte de alunecare” pe o axă verticală situată în centrul bolții. Aspectul lor particular, care era o tehnică de construcție moștenită de la etrusci, formau spirale uriașe de cărămizi, făcând posibilă distribuirea greutateii numai pe suprafața de reazem în expansiune. Aceste tehnici, combinate între ele, au făcut posibilă formarea unei structuri auto portante, fără încovoieri. Pentru construcția cupolei s-au folosit 4 milioane de cărămizi de diferite forme și dimensiuni, iar acesta este cel mai mare cupolă de cărămidă din lume.

Trebuie de menționat că în atelierul lui Brunelleschi lucra în acea perioadă tânărul Michelangelo Buonarroti, care va folosi modelul

florentin al cupolei Santa Maria del Fiore la proiectarea cupolei Bazilicii Sf. Petru din Vatican.



Figura 2. Catedrala catolică Santa Maria del Fiore.

Bazilica Sfântul Petru din Roma, edificiul, lung de 186 metri, cu înălțimea cupolei de 119 metri și o suprafață totală de peste 15000 m², este cea mai mare biserică din lume. (fig.3) Bazilica a fost construită pe locul bisericii vechi din secolul al IV-lea, ridicată pe mormântul Sfântului Petru. Construcția a durat 120 de ani și pe parcurs a fost realizată de cei mai renumiți arhitecți ai Renașterii, implicați în proiectarea și pictarea acestei capodopere, inclusiv Rafael Sanzio și Michelangelo Buonarroti. Primul arhitect al acestei lucrări a fost **Donato Bramante**, care a desenat o catedrală după modelul Panteonului din Roma, ultima minune arhitecturală a antichității, care mai supraviețuia în oraș. Michelangelo reia ideea planului central propus de Bramante și o reface într-o formă mai clară și mai simplă. Până atunci, proiectul lui Bramante exista deja, amintind de cupola sferică a Panteonului. Michelangelo a aruncat o privire la prima schiță a lui Bramante, dar cu un impuls arhitectural mai viguros și o formă simplificată, aplecând forma arcului catenar al catedralei Santa Maria del Fiore, care servit ca model pentru această capodoperă grandioasă.

Christopher Wren (1632-1723, Londra, Anglia) a fost un arhitect și matematician englez care a reconstruit centrul Londrei după marele incendiu din 1666. Profesor de matematică la Oxford și unul dintre fondatorii și membrii activi ai Societății Regale din Londra, a fost angajat în cercetări și soluții la mai multe probleme de matematică și mecanică, care au fost de interes pentru oamenii de știință contemporani (Huygens, Pascal etc.), care studiat întrebările despre modelul matematic al arcului

catenar, arcului cicloid-ului, cuadratura și cubatura zonelor și corpurilor de revoluție formate de acesta, întrebările despre oscilația pendulului, despre forțele care țin planetele pe orbite.



Figura 3. Arhitectura cupolei Bazilicii Sf. Petru din Vatican

La 30 iulie 1669, Sir Christopher Wren a fost împuternicit cu proiectarea Catedralei Sf. Paul principală catedrală anglicană din Londra. (fig.4) Anterior, el a fost responsabil pentru restaurarea bisericilor, în locul celor distruse în Marele Foc din anul 1666. Peste 50 de biserici din oraș au fost proiectate de Wren. Concomitent cu proiectarea Catedralei Sf. Paul, Wren a fost implicat în elaborarea celor cinci tratate ale sale despre energie.



Figura 4. Catedrala Sf. Paul

Una dintre provocările de proiectare cu care s-a confruntat Wren a fost crearea unui dom iconic suficient de înalt pentru a înlocui vizual Turnul catedralei Sf. Paul, pierdut în incendiu. Wren a proiectat domul cu cocă dublă, ca în Bazilica Sf. Petru. Soluția sa la problema vizuală era să separe înălțimea cupolei interioare și exterioare mai mult decât a făcut Michelangelo la Sf. Petru, desenând ambele linii ca curbe catenare. Catedrala a fost finalizată în anul 1675.

Fizicianul englez Robert Hooke (1635-1703) a descris proprietățile uimitoare a liniei catenare răsturnate, dovedind că este cea mai stabilă formă pentru arcurile de sine stătătoare. Hooke a ajuns la această concluzie în 1675 studiind forma cupolei Catedralei Sf. Paul. El a observat că arcadele, care erau realizate în formă de catenară inversată, erau mai stabile și mai puțin predispuse la rupere decât arcadele de alte forme. Hooke (1675) a observat că această curbă are forma unui arc de pietre infinitezimale. Analizând structura liniei lanțului liber suspendat după studiile matematicienilor remarcabili al epocii, Hooke a înțeles, că forțele interne întind lanțul în lungul liniei curbe, adică sunt tangente la lanț în fiecare dintre punctele sale. Inversate aceste forțe de tracțiune sunt transformate în forțe de compresiune, făcând linia catenară un arc perfect, în care toate forțele de compresiune acționează și de-a lungul liniei curbei. În structura unui arc catenar, nu există forțe de încovoiere. Un astfel de arc va fi foarte stabil cu o cantitate minimă de elemente de zidărie, fără a fi necesară fixarea cu mortar a elementelor de zidărie, deoarece ele se presează unul pe altul pe toată înălțimea.

II. Rolul expresiei matematice a arcului catenar în dezvoltarea calculului diferențial în secolul XVII

Dezvoltarea calculului diferențial și integral a evaluat în secolul XVII din necesitatea rezolvării unor problemelor practice, precum calculul traiectoriilor navelor maritime, rezistența construcțiilor de poduri și arcade. Rezolvarea problemei ecuației liniei catenare suspendate liber (1691) de către triada I. Bernoulli -G. Leibniz - H. Huygens a trasat o linie sub stadiul inițial de dezvoltare a analizei matematice și a marcat trecerea acesteia la o fază contemporană.

Unul dintre primii învățați, care a studiat problema liniei catenare a fost Galileo Galilei (1564–1642), care a considerat că catenara are o formă asemănătoare parabolei. Acest lucru a fost infirmat de Huygens, care la vârsta de 17 ani (1646), a arătat, că această parabolă are forma pe care o asumă un cordon flexibil încărcat de greutate, care sunt distribuite

uniform pe direcția orizontală (cum este aproximativ cazul pentru cablul unui pod suspendat).

Problema expresiei matematice a catenarei parțial a fost rezolvată în 1691 de Johann Bernoulli (1667–1748, 1691), Christiaan Huygens (1629–1695), și Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716), care fiecare independent, s-au antrenat în studiul liniei catenare ca răspuns la o provocare, propusă de Jakob Bernoulli (1655–1705) de a rezolva această problema.[1,5]

În rezultat Huygens (mai sus a fost evidențiat colaborarea lui cu Christopher Wren) a propus o soluție aproximativă a problemei catenarei folosind conceptul de integrale, soluția care nu a fost completă și nu a putut fi folosită pentru a rezolva toate problemele cu liniile catenare. Johann Bernoulli a arătat că curba satisface ecuația diferențială:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{s}{a}, \text{ unde } a \text{ este o constantă, } s \text{ este lungimea arcului OP.}$$

(fig.5)

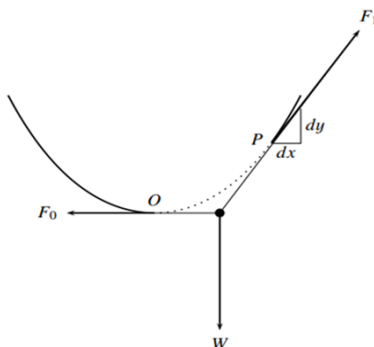


Figura 5. Linia catenară (parabola catenară)

Derivarea acestei ecuații obținute, înlocuind pentru porțiunea OP a lanțului, menținută în echilibru de forța tangențială F_1 din P prin forța orizontală F_0 , care este independentă de P și o masă punctuală W egală cu greutatea lui OP (deci proporțională cu s). Comparând direcțiile și mărimile forțelor Bernoulli a obținut ecuația:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{W}{F_0} = \frac{s}{a}. \quad [4]$$

Prin transformări ingenioase, Johann Bernoulli confirmă, că dacă această curbă este o catenară, atunci se satisface ecuației diferențiale a lui Leibniz de tipul:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{\sqrt{y^2 + 2ay}}, a - \text{const.}$$

Leibniz a continuat să lucreze la problema liniei catenare și în 1696, a reușit să găsească soluția completă [3]. El ajunge la concluzia că linia catenară trebuie să corespundă ecuației:

$$a \frac{dy}{dx} = \int_0^x \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

Adică, derivata scalată, în fiecare punct al curbei $y(x)$ trebuie să fie egală cu lungimea arcului $s(x)$ măsurate de la vârf. Acest lucru îl deduce imediat pe Leibniz la obținerea ecuației diferențiale, care în această formă poate fi văzută în manualele de mecanică:

$$\frac{dy'}{\sqrt{1 + (y'(x))^2}} = \frac{dx}{a}.$$

Soluția ecuației este cosinusul hiperbolic:

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} - a.$$

În așa mod ecuația catenară a devenit unul dintre exemplele clasice de ecuații diferențiale de ordinul doi. Soluția completă a problemei catenare a fost una dintre primele aplicații ale calculului diferențial și a reprezentat o descoperire majoră în matematica aplicată.

III. Cosinusul hiperbolic și funcția inversă [2,4]

Pentru $x \in \mathbb{R}$ cosinusul hiperbolic (fig.6) este :

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Domeniile $\operatorname{ch}: [0; +\infty) \rightarrow [1; +\infty)$ sunt o bijecție.

Inversa este $\operatorname{Argch}: [1; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$.

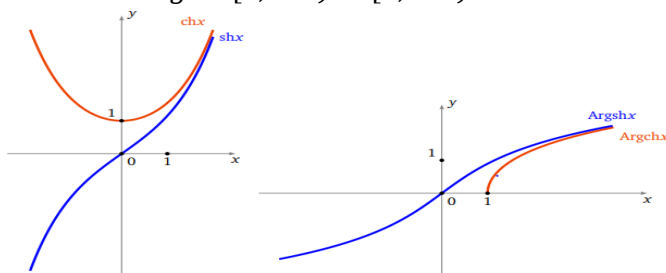


Figura 6. Graficul funcției cosinusul hiperbolic și a funcției inverse

Implementarea funcțiilor hiperbolice a dat un impuls folosirii pe larg a arcului catenar de către arhitecturi și ingineri constructori. Până la

apariția erei computerelor, cel mai rapid mod de a le crea era să atârne un lanț de lungimea necesară, după care se desena o curbă, după care se construia un cofraj-suport și se instala într-o poziție inversată.

Un exemplu de aplicare a arcului catenar în arhitectură secolului XIX este Gara Keleti [1]. Construită între 1881 și 1884, este remarcabilă prin acoperișul în formă de arc catenar, care conferă clădirii o estetică impresionantă și unică. Structura portantă a acoperișului în formă de arc catenar a fost folosit pentru prima dată ca o caracteristică arhitecturală inovatoare. Alcătuit dintr-o serie de arcuri catenare interconectate, a permis construirea unei acoperiri mari, fără stâlpi și grinzi în interiorul clădirii. Astfel, interiorul clădirii a fost lăsat deschis și nefragmentat, oferind o senzație de spațiu larg și deschis. (fig.7)

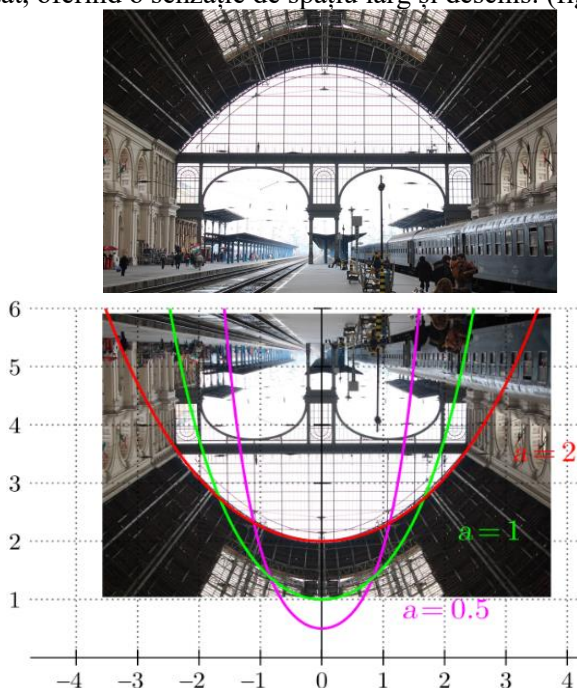


Figura 7. Structura portantă inversată a acoperișului gării Keleti din Budapesta

După cum vedem din fig. 6 Ecuația hiperbolei va fi :

$$y = 2ch \frac{x}{a} - 2$$

Principiul catenarei a fost folosit și de inginerul francez Gustave Eiffel în construcția Turnului Eiffel din Paris în 1889. Eiffel a folosit principiul pentru a determina forma și distribuția optimă a greutateii turnului, permițându-i să stea înalt și puternic, în ciuda imensei sale înălțime [3].

Antoni Gaudí, celebrul arhitect spaniol, a aplicat acest principiu în mai multe dintre proiectele sale, în special în cadrul designului său revoluționar pentru biserica Sagrada Família din Barcelona.

Gaudí a utilizat principiul catenarei pentru a proiecta arcele și coloanele înaltului interior al bisericii. El a înțeles că o catenă suspendată sub propria sa greutate va avea o formă ideală, numită "forma catenei". Această formă asigură o distribuție eficientă a forțelor, ceea ce duce la o structură mai rezistentă. Pentru a aplica acest principiu în proiectele sale, Gaudí a utilizat modele tridimensionale suspendate, denumite "modelul de catenă", pentru a simula forma optimă a structurii. El a realizat mai multe teste și experimente pentru a găsi configurația cea mai eficientă și să o integreze în designul său arhitectural. [10]

Un exemplu concret al aplicării principiului catenarei în proiectele lui Gaudí este în proiectarea coloanelor interioare ale bisericii Sagrada Família. Aceste coloane au o formă curbată și evocă aspectul unei catene suspendate. Prin folosirea principiului catenarei, Gaudí a reușit să creeze structuri solide și, în același timp, să ofere o frumusețe estetică unică.

Aplicarea principiului catenarei în proiectele lui Gaudí demonstrează abilitatea sa de a combina matematica și fizica cu arta arhitecturală. Aceasta a contribuit la creația unor structuri remarcabile și inovatoare, care au devenit simboluri ale arhitecturii moderne și au avut o influență semnificativă asupra arhitecturii ulterioare.

Un alt exemplu notabil de utilizare a principiului catenarei în arhitectură este Gateway Arch din St. Louis, Missouri, proiectat de arhitectul Eero Saarinen în 1965. Arcul este realizat din oțel inoxidabil și se ridică în sus la 630 de picioare ($1\text{ft}=0.3048\text{ m}$), cu o formă modelată pe curba catenară pentru a asigura stabilitate și rezistență maximă. [6]

În ultimii ani, principiul catenarei a fost utilizat într-o varietate de proiecte arhitecturale moderne, inclusiv poduri, cupole și alte structuri. Utilizarea sa permite modele mai eficiente și mai stabile care pot rezista forțelor naturii și oferă o durabilitate și siguranță mai mare.

Principiul catenarei a fost folosit și în proiectarea pardoselilor din beton armat la construcția Megaeroportului Internațional din Kuweit de

compania de arhitectură din Londra „**Foster and Partners**”. Planșeile din beton armat în forma de arc catenar au fost proiectate datorită durabilității și rezistenței lor. La proiectarea unui planșeu din beton armat, inginerii au luat în considerare greutatea betonului, greutatea oricăror sarcini care vor fi plasate pe planșeu, potențialul de încovoiere și fisurare. Principiul catenarei folosit au determinat forma optimă a planșeului din beton armat, ce a minimizat încovoierea și fisurarea construcției, asigurând o rezistență și durabilitatea maximă. Prin proiectarea formei planșeului pe baza principiului catenarei, inginerii au proiectat o structură care distribuie uniform greutatea betonului și a oricăror sarcini, au optimizat grosimea planșeului, reducând greutatea totală a structurii și au micșorat substanțial costurile de construcție. În concluzie, principiul catenarei utilizat în proiectarea planșeelor din beton armat la Aeroportul Internațional Kuwait a asigurat rezistența, durabilitatea și eficiența maximă a construcțiilor ansamblului aeroportuar.



Figura 8. Arcurile catenare ale Aeroportului Internațional din Kuwait

Concluzii:

Istoria arhitecturii confirmă faptul, arhitecții au avut nevoie de matematică cel puțin încă de pe vremea când unul de-ai lor desena un unghi drept cu ajutorul unei frânghii cu 13 noduri. Faptul că matematica este o parte importantă a arhitecturii și evidențiată în tratatul lui Vitruviu „Despre arhitectură” alcătuit cu aproximativ două mii de ani în urmă. La începutul secolului al XX-lea, Le Corbusier observa că, oricât de diferită sau nouă ar fi arhitectura modernă, matematica este în centrul ei.

În articol se descrie cum în procesul dezvoltării istorice a arhitecturii sa folosit la proiectarea bolților forma arcului catenar. Arhitecții din vechime au folosit formele durabile ale naturii, cum ar fi arcade în peșteri și arcade de stâncă naturală, pentru a concepe forme abstracte a bolților, și prin experimente în construcții reale, prin eșecuri, modificări, succese și evoluții de-a lungul mileniilor, au dezvoltat ”regulile artei” în construire. Implementarea acestor reguli au permis construcția unor capodopere arhitecturale, care au supraviețuit până în prezent. În articol se arată cum necesitatea rezolvării problemelor durabilității au stimulat dezvoltarea matematicii și mecanicii, și ca exemplu, dezvoltarea calcului diferențial au permis descrierea matematică și mecanică a arcului catenar. Analiza teoretică a arcului catenar a stimulat folosirea lui pe larg în arhitectura modernă.

Referințe:

1. Bodin, Arnaud, Borne, N., Bourdon, M., et d'autres. *Analize. Cours de mathematiques*. Lille: Universite de Lille, 2016
2. Karel Vereycken. *Percer les mystères du dôme de Florence*. Fusion, n° 93, mai - juin 2003
3. Kiepert , Ludwig. *Grundriß der Differential-Rechnung*. Helwingsche Verlagsbuchhandlung, Hannover 1921.
4. Lemoine, Bertrand. *The Eiffel Tower*. TASCHEN, 2018.176p. ISBN-13: 978-3836584418
5. Ross King. *Brunelleschi's Dome: How a Renaissance Genius Reinvented Architecture*. Edición Kindle, ISBN, 0142000159, Penguin Books, 2001
6. Stillwell, John *Mathematics and its history Mathematics*. San Francisco: Department San Francisco State University, CA 94132 USA
7. Овчинников П.П. та ін. *Вища математика: Ч.I. Диференціальне і інтегральне числення*. Київ, Техніка, 2003
8. <https://uk.wikipedia.org/wiki/Такі-Кіпра>
9. https://uk.wikipedia.org/wiki/Собор_Святого_Петра
10. Jane Burry, Mark Burry. *The New Mathematics of Architecture*. Published 2012 by Thames & Hudson. ISBN 978-0-500-34264