

CZU: 519.673:514+511.14

REZOLVAREA UNOR PROBLEME DE GEOMETRIE CU AJUTORUL NUMERELOR COMPLEXE

Leonid DOHOTARU

Ion JARDAN

Universitatea Tehnică a Moldovei

e-mail: leonid.dohotaru@mate.utm.md, ion.jardan@mate.utm.md

Rezumat. În această lucrare se arată că unele probleme din geometrie pot fi ușor rezolvate cu ajutorul numerelor complexe, respectiv cu ajutorul vectorilor plani ce le corespund.

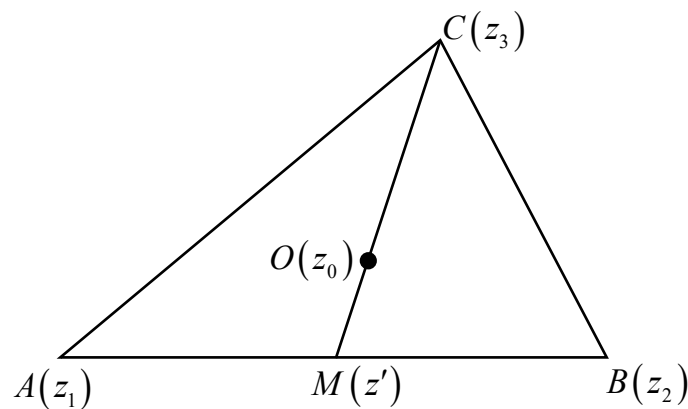
Cuvinte cheie: geometrie, probleme de geometrie, numere complexe, vector plan.

Abstract. In this paper it is shown that some problems in geometry can be easily solved with the help of complex numbers, respectively with the help of their corresponding plane vectors.

Key words: geometry, geometry problems, complex numbers, plane vector.

Vom considera câteva probleme pentru a arăta aplicabilitatea numerelor complexe în geometrie.

Problema 1. Să se afle coordonata complexă a punctului de intersecție a medianelor în $\triangle ABC$, dacă coordonatele complexe ale vârfurilor $\triangle ABC$ sunt respectiv z_1, z_2 și z_3 .



Soluție. Fie O este punctul de intersecție a medianelor $\triangle ABC$, iar M este mijlocul segmentului AB și z' – coordonata complexă a punctului M . Atunci $z' = \frac{z_1+z_2}{2}$. Vectorul $\overrightarrow{MC}$ are coordonata complexă $z_3 - z' = z_3 - \frac{z_1+z_2}{2}$. Deoarece $\overrightarrow{MO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MC}$, rezultă că coordonata complexă a vectorului $\overrightarrow{MO}$ este $\frac{1}{3}\left(z_3 - \frac{z_1+z_2}{2}\right) = z_0 - z'$, de aici

$$z_0 = z' + \frac{1}{3}(z_3 - z') = \frac{2}{3}z' + \frac{1}{3}z_3 = \frac{z_1+z_2+z_3}{3},$$

adică se obține coordonata complexă a centrului de greutate a $\triangle ABC$.

■

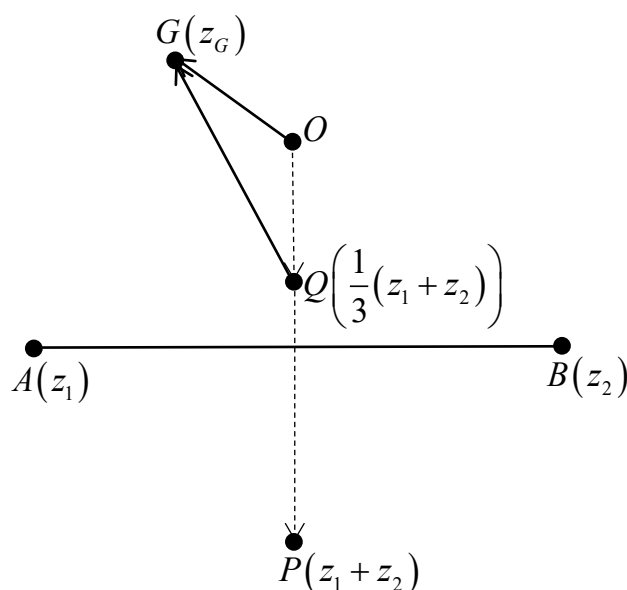
Problema 2. Să se demonstreze că atunci când unul dintre vârfurile triunghiului ABC descrie cercul circumscris triunghiului, locul geometric al centrului de greutate al triunghiului este un cerc.

Soluție. Alegem originea axelor de coordonate O astfel, ca ea să coincidă cu centrul cercului circumscris $\triangle ABC$, vârfurile A și B fiind fixate, iar vârful C variabil. Dacă notăm coordonatele complexe ale vârfurilor $\triangle ABC$ cu z_1, z_2 și respectiv z_3 , atunci conform formulei obținute în problema precedentă, avem

$$z_G = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3) \quad (1),$$

unde G este centru de greutate al $\triangle ABC$.

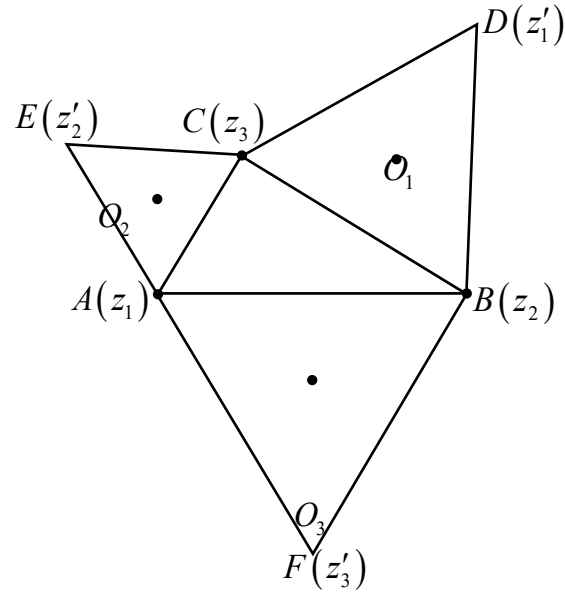
Din (1) rezultă că $z_G - \frac{1}{3}(z_1 + z_2) = \frac{1}{3}z_3$.



Deoarece A și B sunt fixe, suma $z_1 + z_2$ reprezintă vectorul constant $\overrightarrow{OP}$, iar $\frac{1}{3}(z_1 + z_2)$ reprezintă vectorul fix $\overrightarrow{OQ}$, aici $OQ = \frac{1}{3}OP$. Diferența $z_G - \frac{1}{3}(z_1 + z_2)$ reprezintă diferența $\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OQ}$, adică vectorul $\overrightarrow{QG}$, care are originea în punctul fix Q . Modulul acestui vector este $\frac{1}{3}|z_3| = \frac{1}{3}R$ (R fiind raza cercului circumscris $\triangle ABC$), urmează că extremitatea G a vectorului $\overrightarrow{QG}$ descrie un cerc cu centrul în Q și raza $\frac{1}{3}R$. ■

Problema 3. Să se demonstreze că dacă pe laturile $\triangle ABC$ (în exterior) sunt construite triunghiuri echilaterale, atunci centrele lor de asemenea formează un triunghi echilateral.

Soluție. Fie $z_1, z_2, z_3, z'_1, z'_2, z'_3, u_1, u_2, u_3$ reprezintă coordonatele complexe a punctelor $A, B, C, D, E, F, O_1, O_2, O_3$ respectiv.



Notăm $a = e^{i\frac{\pi}{3}}$. Atunci avem

$$z'_1 = z_3 + a(z_2 - z_3); z'_2 = z_1 + a(z_3 - z_1); z'_3 = z_2 + a(z_1 - z_2).$$

Aplicând rezultatele problemei 1, aflăm coordonatele complexe ale punctelor O_1 , O_2 și O_3 .

$$u_1 = \frac{1}{3}(z'_1 + z_2 + z_3) = \frac{1}{3}(z_2 + 2z_3 + a(z_2 - z_3)),$$

$$u_2 = \frac{1}{3}(z_1 + z'_2 + z_3) = \frac{1}{3}(2z_1 + z_3 + a(z_3 - z_1)),$$

$$u_3 = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z'_3) = \frac{1}{3}(z_1 + 2z_2 + a(z_1 - z_2)).$$

Considerăm diferențele

$$u_1 - u_3 = \frac{1}{3}(2z_3 - z_1 - z_2 + a(2z_2 - z_3 - z_1)),$$

$$u_2 - u_3 = \frac{1}{3}(z_3 + z_1 - 2z_2 + a(z_2 + z_3 - 2z_1)).$$

Numărul $a = e^{i\frac{\pi}{3}}$ verifică ecuația $a^3 + 1 = 0$ sau $(a + 1)(a^2 - a + 1) = 0$.
Deoarece $a \neq -1$, rezultă că $a^2 - a + 1 = 0$ sau $a^2 = a - 1$.

Luând în considerație această relație calculăm $a(u_1 - u_3)$:

$$\begin{aligned} a(u_1 - u_3) &= \frac{1}{3}(a(2z_3 - z_1 - z_2) + a^2(2z_2 - z_3 - z_1)) = \\ &= \frac{1}{3}(a(2z_3 - z_1 - z_2) + (a - 1)(2z_2 - z_3 - z_1)) = \\ &= \frac{1}{3}(z_1 + z_3 - 2z_2 + a(-2z_1 + z_2 + z_3)) = u_2 - u_3, \end{aligned}$$

adică $u_2 - u_3 = a(u_1 - u_3)$.

Deoarece $a = e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$, avem că

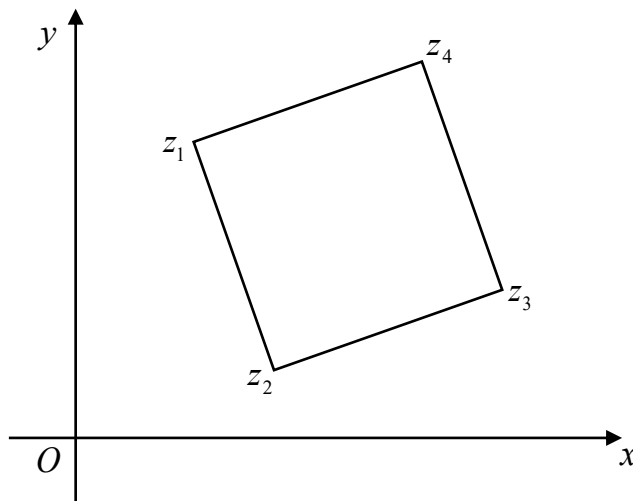
$$|a| = 1, \arg(a) = \frac{\pi}{3},$$

de unde vectorul $\overrightarrow{O_3O_2}$ se obține din vectorul $\overrightarrow{O_3O_1}$ rotindu-l cu unghiul $\frac{\pi}{3}$ împotriva acelor de ceasornic. Deci $\triangle O_1O_2O_3$ este echilateral.

Observație. Această problemă i se atribuie lui Napoleon, de aceea triunghiul indicat se mai numește triunghiul exterior al lui Napoleon pentru $\triangle ABC$. ■

Problema 4. Două vârfuri vecine ale unui pătrat se află în punctele z_1, z_2 . Să se afle celelalte coordonatele celorlalte două vârfuri.

Soluție. Fie $z_1z_2z_3z_4$ este pătratul dat.



Vectorul $\overrightarrow{z_1z_4}$ se obține din vectorul $\overrightarrow{z_1z_2}$ rotind ultimul la unghiul $\frac{\pi}{2}$ împotriva acelor de ceasornic, ceea ce este echivalent cu înmulțirea coordonatelor complexe a vectorului $\overrightarrow{z_1z_2}$ la numărul i .

De aceea $z_4 - z_1 = i(z_2 - z_1)$ și $z_4 = z_1 + i(z_2 - z_1)$.

Deoarece $z_4 - z_1 = z_3 - z_2$, se obține $z_3 - z_2 = i(z_2 - z_1)$, de unde urmează $z_3 = z_2 + i(z_2 - z_1)$.

Evident, există și un alt pătrat amplasat simetric în raport cu dreapta care trece prin punctele z_1 și z_2 , vârfurile căruia z'_3 și z'_4 sunt situate în partea de jos (stânga) a dreptei z_1z_2 . În acest caz coordonatele vârfurilor z'_3 și z'_4 se determină conform formulelor:

$$z'_3 = z_2 - i(z_2 - z_1), z'_4 = z_1 - i(z_2 - z_1).$$
 ■

Bibliografie

1. ACHIRI, I.; CIOBANU, V.; EFROS, P.; GARIT, V.; NEAGU, V.; PRODAN, N.; TARAGAN, D.; TOPALĂ A. *Matematică*. Ediția a II-a revizuită și completată, Manual pentru clasa a XI. Chișinău: Prut internațional, 2014.
2. ПОНТРЯГИН, Л.С. *Обобщения чисел*. Москва: Наука, 1986.
3. ЯГЛОМ, И.М. *Комплексные числа*. Москва: Наука, 1963.