

CZU: 519.673:512

REZOLVAREA UNOR SISTEME DE ECUAȚII ALGEBRICE

Leonid DOHOTARU

Ion JARDAN

Universitatea Tehnică a Moldovei

e-mail: leonid.dohotaru@mate.utm.md, ion.jardan@mate.utm.md

Rezumat. În acest material sunt prezentate diferite metode de rezolvare a unor sisteme nestandarde de ecuații algebrice. Exemplele și soluțiile propuse vor contribui la formarea unor abilități practice de rezolvare a sistemelor de ecuații non-standard.

Cuvinte cheie: ecuație algebrică, sistem de ecuații algebrice, soluție.

Abstract. In this material, different methods of solving non-standard systems of algebraic equations are presented. The proposed examples and solutions will contribute to the formation of practical skills for solving systems of non-standard equations.

Keywords: algebraic equation, system of algebraic equations, solution.

La rezolvarea unor sisteme nestandarde nu întotdeauna este posibil de a observa acea combinație a ecuațiilor date, care duce la obținerea soluției, cât și de a găsi acele transformări, care ar permite simplificarea considerabilă a acestora. Evident, nu există procedee generale pentru a rezolva astfel de sisteme. Numai acumularea unei practici suficiente de rezolvare a acestora poate ajuta la identificarea și evidențierea acelor particularități ale sistemului propus, care permit în final de al reduce la un alt sistem, ce se rezolvă simplu.

Vom considera câteva exemple de sisteme de ecuații algebrice la rezolvarea cărora este necesar de a manifesta o careva ingeniozitate.

Exemplul 1. Să se rezolve în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} 2y^2x - yx^5 = 1 \\ y + 3x^4 = 10y^2x^5 \end{cases} \quad (1).$$

Soluție. Vom încerca să exprimăm una din variabile prin cealaltă.

Deoarece variabila x intră în ecuațiile sistemului în diverse forme (x , x^4 și x^5), este greu de a aștepta ca să putem exprima x prin y , din această cauză vom încerca să exprimăm y prin x . Pentru acesta este suficient să excludem, prin reducere, termenii ce conțin y^2 .

Observăm că $x \neq 0$, deoarece dacă $x = 0$, atunci prima ecuație devine $0 - 0 = 1$, ceea ce este imposibil. Înmulțind prima ecuație cu $5x^4$ și adunând-o la ecuația a doua, se obține

$$\begin{aligned} 10y^2x^5 - 5yx^9 + y + 3x^4 &= 5x^4 + 10y^2x^5 \Leftrightarrow \\ -5yx^9 + y &= 2x^4 \Leftrightarrow y(1 - 5x^9) = 2x^4. \end{aligned}$$

Așadar, sistemul (1) este echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} 2y^2x - yx^5 = 1 \\ y(1 - 5x^9) = 2x^4 \end{cases} \quad (2).$$

Menționăm, că $1 - 5x^9 \neq 0$, deoarece dacă admitem că $1 = 5x^9$, obținem în ecuația a doua $x = 0$, dar $x \neq 0$. Deci sistemul (2) este echivalent cu sistemul:

$$\begin{cases} 2y^2x - yx^5 = 1 \\ y = \frac{2x^4}{1-5x^9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(\frac{2x^4}{1-5x^9}\right)^2 \cdot x - \frac{2x^4}{1-5x^9} \cdot x^5 = 1 \\ y = \frac{2x^4}{1-5x^9} \end{cases} \quad (3).$$

Prima ecuație din sistem poate fi scrisă

$$\frac{8x^9}{(1-5x^9)^2} - \frac{2x^9}{1-5x^9} = 1 \quad (4).$$

Notăm $x^9 = t$. Atunci ecuația (4) se scrie în forma

$$\frac{8t}{(1-5t)^2} - \frac{2t}{1-5t} = 1 \quad (5).$$

Înmulțind ambele părți a ecuației (5) cu $(1 - 5t)^2$, ceea ce avem dreptul să facem deoarece $1 - 5x^9 \neq 0$, adică $1 - 5t \neq 0$, se obține ecuația $15t^2 - 16t + 1 = 0$, de unde $t = \frac{1}{15}$ sau $t = 1$. Prin urmare pentru ecuația (4), avem $x = 15^{-\frac{1}{9}}$ sau $x = 1$.

Acum din ecuația a doua a sistemului (3), se obține pentru $x = 15^{-\frac{1}{9}}$, $y = 3 \cdot 15^{-\frac{4}{9}}$, iar pentru $x = 1$, $y = -\frac{1}{2}$.

$$S = \left\{ \left(15^{-\frac{1}{9}}; 3 \cdot 15^{-\frac{4}{9}} \right), \left(1; -\frac{1}{2} \right) \right\}.$$

Exemplul 2. Să se rezolve în $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul:

$$\begin{cases} 2z^2 + yz + 10x^2y = 0 \\ yz + z^2 + 9x^3y^2 = 3xy^2 \\ 2y^2 + 18xy^2 - z^2 = 10x^2z \end{cases} \quad (6).$$

Soluții. Vom încerca să exprimăm una din necunoscute prin celelalte.

După o analiză a posibilităților existente, vom încerca să exprimăm x prin y și z , adică de fapt x^3 , deoarece este imposibil de a elimina simultan termenii cu x^2 și x^3 , iar eliminarea termenilor care conțin x și x^2 este posibilă. Pentru aceasta, înmulțim prima ecuație a sistemului (6) cu z , a doua ecuație cu $6y$, iar a treia ecuație cu y (desigur în condițiile $z \neq 0$, $y \neq 0$), și adunând parte cu parte cele trei ecuații obținute, avem $2z^3 + yz^2 + 10x^2yz + 6y^2z + 6yz^2 + 54x^3y^3 + 2y^3 + 18xy^3 - yz^2 = 18xy^3 + 10x^2yz$.

După efectuarea reducerii termenilor asemenea, se obține

$$2z^3 + 6yz^2 + 6y^2z + 2y^3 = -54x^3y^3 \Leftrightarrow z^3 + 3yz^2 + 3y^2z + y^3 = -27x^3y^3 \Leftrightarrow (z + y)^3 = (-3xy)^3, \text{ de unde conchidem că } z + y = -3xy \quad (7).$$

Dacă $z = 0$, atunci sistemul (6) are forma

$$\begin{cases} 10x^2y = 0 \\ 9x^3y^2 = 3xy^2 \\ 2y^2 + 18xy^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases},$$

adică avem soluția (0,0,0).

$$\text{Dacă } y = 0, \text{ atunci sistemul (6) devine } \begin{cases} 2z^2 = 0 \\ z^2 = 0 \\ -z^2 = 10x^2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}, \text{adică avem soluția}$$

(c, 0,0), $c \in \mathbb{R}$, care conține soluția (0,0,0) de mai sus.

Dacă $y = 0$ și $z = 0$, ca și în cazul de mai sus, se obține soluția (c, 0,0), $c \in \mathbb{R}$.

Deci în continuare $z \neq 0$, $y \neq 0$.

Ecuția (7) este consecința sistemului (6).

Exprimăm din (7) pe z prin x și y : $z = -y(3x + 1)$. Substituind z în ecuația a doua a sistemului (6), se obține

$$\begin{aligned} -y^2(3x+1) + y^2(3x+1)^2 + 9x^3y^2 = 3xy^2 &\Leftrightarrow y^2(-3x-1+9x^2+6x+1+9x^3-3x) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y^2(9x^3+9x^2) = 0 \Leftrightarrow 9x^2y^2(x+1) = 0 \quad (8). \end{aligned}$$

$$\text{Sistemul } \begin{cases} 2z^2 + yz + 10x^2y = 0 \\ z + y = -3xy \\ 9x^2y^2(x+1) = 0 \end{cases} \quad (9), \text{ care este o consecință din sistemul inițial (6),}$$

și este echivalent cu totalitatea a următoarelor trei sisteme de ecuații:

$$\begin{cases} 2z^2 + yz + 10x^2y = 0 \\ z + y = -3xy \\ x = 0 \end{cases} \quad (10);$$

$$\begin{cases} 2z^2 + yz + 10x^2y = 0 \\ z + y = -3xy \\ y = 0 \end{cases} \quad (11);$$

$$\begin{cases} 2z^2 + yz + 10x^2y = 0 \\ z + y = -3xy \\ x = -1 \end{cases} \quad (12).$$

Sistemul (10) are o singură soluție (0,0,0), ceea ce este imposibil, deci sistemul (10) nu are soluții.

În sistemul (11) avem $y = 0$, ceea ce nu poate fi, prin urmare sistemul nu are soluții.

Să rezolvăm sistemul (12). Substituind $x = -1$ în prima și a doua ecuație a sistemului, se obține sistemul

$$\begin{cases} 2z^2 + yz + 10y = 0 \\ z + y = 3y \\ x = -1 \end{cases} \quad (13).$$

Primele două ecuații a sistemului (13) formează un sistem de două ecuații cu două necunoscute, care se rezolvă prin metoda substituției.

$$\begin{cases} 2z^2 + yz + 10y = 0 \\ z + y = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot 4y^2 + 2y^2 + 10y = 0 \\ z = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10y^2 + 10y = 0 \\ z = 2y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10y(y+1) = 0 \\ z = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = 0 \\ z = 2y \end{cases}.$$

Deoarece $y = 0$ nu poate fi, urmează $y = -1$ și respectiv $z = -2$. Deci soluția sistemului (12) este tripletul $(-1, -1, -2)$.

Așadar, am determinat toate soluțiile sistemelor (10) – (12), prin urmare și ale sistemului (9), și cu cele două cazuri particulare de la început, avem toate soluțiile sistemului (6).

Verificarea soluțiilor găsite prin substituirea lor în ecuațiile sistemului inițial, confirmă că soluții străine nu sunt.

$$S = \{(-1, -1, -2), (c, 0, 0) | c \in \mathbb{R}\}.$$

Exemplul 3. Să se rezolve în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul:

$$\begin{cases} y^3 x = 25 \\ 3y + x = 7 \end{cases} \quad (14).$$

Soluții. Din forma dată a sistemului, rezultă că valorile reale ale necunoscutelor x și y , dacă sistemul le admite, nu pot fi decât strict pozitive.

Utilizând inegalitatea dintre media geometrică și aritmetică, se obține

$$\sqrt[4]{y^3 x} = \sqrt[4]{y \cdot y \cdot y \cdot x} \leq \frac{y+y+y+x}{4} = \frac{3y+x}{4},$$

adică $\sqrt[4]{25} \leq \frac{7}{4} \Leftrightarrow \sqrt{5} \leq 1,75$, ceea ce este imposibil.

Deci sistemul (14) nu admite soluții reale.

$$S = \emptyset.$$

Bibliografie

1. *Сборник задач по математике для поступающих во втузы под ред. М. И. Сканави.* Мир и Образование, Москва, 2006.
2. ACHIRI, I.; CIOBANU, V.; EFROS, P.; GARIT, V.; NEAGU, V.; PRODAN, N.; TARAGAN, D.; TOPALĂ, An. *Matematică (manual cl. XI).* Chișinău: Editura Prut, 2020.
3. COȘNIȚĂ, C.; TURTOIU, F. *Probleme de algebră.* București: Editura Tehnică, 1989.